RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 febbraio 1915.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota II del Socio Vito Volterra.

15. La funzione coniugata di $\log r_A$ è θ_A, denotando con questo simbolo l'angolo che il raggio vettore spiccato dal punto A forma con una direzione fissa; $-\frac{m}{2\pi}\theta_A$ è il potenziale di un vortice situato in A, di momento m (1). Quindi, se si ha in A un elettrodo puntiforme da cui entra la corrente J, il corrispondente potenziale sarà (§ 7)

$$-\frac{J}{2\pi K}\log r_A,$$

e la corrispondente funzione fondamentale

$$-\frac{J}{2\pi K}(\log r_A + \lambda\theta_A) = \frac{J}{2\pi K}\log\frac{1}{r_A} - \frac{\lambda J}{2\pi K}\theta_A;$$

dunque *la funzione fondamentale corrispondente ad un elettrodo punti-*

(1) Supposta l'orientazione degli assi x e y come è indicata nella figura 1 del § 2, noi supponiamo di contare l'angolo θ_A nel senso contrario a quello secondo cui ruotano le lancette di un orologio, mentre ammettiamo che un vortice di momento positivo ruoti nel verso delle lancette di un orologio.

forme in A, *ove entra la corrente di intensità* J, *è il potenziale logaritmico di una massa* $\frac{J}{2\pi K}$ *e di un vortice di momento* $\frac{\lambda J}{K}$ *situato nel punto* A.

Questo resultato può enunciarsi dicendo che l'azione del campo magnetico sulla distribuzione delle correnti si esplica, modificando la funzione fondamentale, coll'aggiungere ad ogni elettrodo un vortice il cui momento è eguale alla intensità moltiplicata per λ divisa per la conducibilità, mentre si mantiene nulla la derivata normale della funzione fondamentale nei punti del contorno libero ed isolato (1).

La funzione θ_A è polidroma: quindi la funzione fondamentale è una funzione polidroma, la quale ha per punti di diramazione gli elettrodi. Dunque, mentre il potenziale è monodromo, e gli elettrodi puntiformi sono i punti di infinito logaritmico, la funzione fondamentale ha negli elettrodi punti di infinito logaritmico e di diramazione.

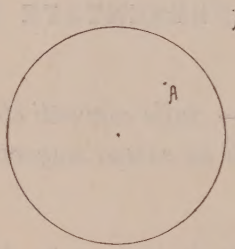


Fig. 12.

16. Supponiamo, adesso, che la lamina sia circolare, e la corrente entri ed esca da elettrodi puntiformi interni. Cerchiamo di calcolare l'effetto del contorno C (che è di render nulla la derivata normale della funzione fondamentale) coll'aggiunta di masse e di vortici immagini distribuiti nei punti reciproci degli elettrodi interni rispetto al contorno.

Sia A_1 il punto reciproco dell'elettrodo A. Se in A_1 disponiamo una massa $\frac{J}{2\pi K}$, il potenziale logaritmico delle due masse $\frac{J}{2\pi K}$ distribuite in A e A_1 avrà la derivata normale lungo C eguale a

$$-\frac{J}{2\pi K R},$$

(1) L'aggiunta del vortice per l'azione del campo magnetico resulta ben naturale quando si pensi all'azione deviatrice prodotta dal campo stesso sul moto degli elettroni nell'intorno dell'elettrodo.

essendo R il raggio del contorno; e se in A_1 disponiamo un vortice di momento

$$-\frac{\lambda J}{K},$$

il potenziale dei due vortici di momenti $-\frac{\lambda J}{K}$ e $\frac{\lambda J}{K}$ disposti in A_1 e A avrà la derivata normale nulla al contorno.

Tenendo presente che le somme algebriche delle intensità delle correnti che entrano dai varî elettrodi interni è nulla, si otterrà dunque, come espressione della funzione fondamentale,

$$(9) \qquad U = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} \{\log r_A + \log r_{A_1} + \lambda\theta_A - \lambda\theta_{A_1}\},$$

essendo estesa la somma a tutti gli elettrodi interni.

La espressione stessa può scriversi:

$$U = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\log r_A + \lambda\theta_A) + \psi,$$

ove

$$\psi = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\log r_{A_1} - \lambda\theta_{A_1});$$

ed evidentemente ψ è regolare entro l'area occupata dalla lamina, giacchè i punti di infinito e di diramazione sono tutti esterni all'area stessa.

Il resultato ottenuto può enunciarsi nei termini seguenti:

La distribuzione delle correnti che entrano ed escono da elettrodi puntiformi in una lamina circolare soggetta ad un campo magnetico, è quella stessa che si avrebbe sopprimendo il campo magnetico, rendendo indefinita la lamina ed aggiungendo ad ogni elettrodo ove la intensità è J *un vortice di momento* $\frac{\lambda J}{K}$; *inoltre aggiungendo, nel punto reciproco di ciascun elettrodo interno, un elettrodo immagine ove la intensità è la stessa, ed un vortice immagine del vortice interno di momento invertito.*

17. Poichè abbiamo calcolato, mediante la formula (9), la funzione fondamentale della distribuzione delle correnti, così, applicando la regola (E'), possiamo ricavare dalla espressione ottenuta il potenziale.

Cominciamo dall'esprimere la funzione coniugata di U. Questa sarà

$$U' = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\theta_A + \theta_{A_1} - \lambda \log r_A + \lambda \log r_{A_1}),$$

e perciò il potenziale resulterà

$$(10) \quad V = \frac{U - \lambda U'}{1 + \lambda^2} = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} \left(\log r_A + \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \log r_{A_1} - \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \theta_{A_1}\right).$$

Ora, poichè $\lambda = \operatorname{tg}\beta$, abbiamo

$$\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} = \cos 2\beta \quad , \quad \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} = \operatorname{sen} 2\beta \, .$$

quindi

$$(10') \qquad V = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\log r_A + \cos 2\beta \, . \log r_{A_1} - \operatorname{sen} 2\beta \, . \, \theta_{A_1}) \, .$$

Questa espressione può scriversi

$$(10'') \qquad V = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} \log r_A + \varphi \, ,$$

ove

$$(10_a) \qquad \varphi = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\cos 2\beta \, . \log r_{A_1} - \operatorname{sen} 2\beta \, . \, \theta_{A_1}) \, .$$

Il primo termine delle (10'') è il potenziale degli elettrodi, ed il secondo termine φ è una funzione regolare nell'area occupata dalle lamina, giacchè i punti di infinito e di diramazione sono esterni.

Il resultato conseguito può enunciarsi nei termini seguenti:

Se in una lamina circolare soggetta ad un campo magnetico, le correnti entrano ed escono da elettrodi puntiformi, il potenziale si otterrà aggiungendo a quello di ciascun elettrodo ove la intensità è J *il potenziale di un elettrodo immagine situato nel punto reciproco di intensita* J cos 2β, *e quello di un vortice pure disposto nel punto reciproco di momento* $-\dfrac{J \operatorname{sen} 2\beta}{K}$.

18. Esistono dunque *due diversi principii delle immagini* nel caso in cui la lamina è soggetta al campo magnetico, uno dei quali è relativo alla distribuzione delle correnti e quindi alla *funzione fondamentale*, e l'altro al *potenziale elettrico*.

19. Questi stessi resultati possono ottenersi molto facilmente adoperando le funzioni di variabili complesse introdotte alla fine del § 14. Osserviamo che se a ed a' denotano gl'indici di due punti reciproci rispetto ad un cerchio nel piano complesso $z = x + iy$ e $\Sigma M = 0$ essendo le M e la m reali, si ha che la funzione

$$(11) \qquad e^{im} \Sigma M \log (z - a) - e^{-im} \Sigma M \log (z - a')$$

ha la parte reale costante sulla periferia del cerchio, e

$$(11') \qquad e^{im} \Sigma M \log (z - a) + e^{-im} \Sigma M \log (z - a')$$

ha costante la parte immaginaria.

Ora se denotiamo con a gl' indici degli elettrodi puntiformi il potenziale degli elettrodi è la parte reale della funzione di variabile complessa

$$\varphi = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} \log(z - a),$$

quindi in virtù della (E'') la corrispondente funzione fondamentale sarà la parte reale di

$$f = \frac{-e^{-i\beta}}{\cos\beta} \Sigma \frac{J}{2\pi K} \log(z - a).$$

Tenendo conto del contorno circolare la funzione fondamentale dovrà resultare quindi, a cagione della (11'), come parte reale di

$$F = -\Sigma \frac{1}{2\pi K \cos\beta} (e^{-i\beta} \log(z - a) + e^{i\beta} \log(z - a')),$$

e per conseguenza, per la (E''), il potenziale elettrico sarà la parte reale di

$$\Phi = -\Sigma \frac{1}{2\pi K} (\log(z - a) + e^{2i\beta} \log(z - a')),$$

da cui resultano immediatamente le formule (9) e (10).

20. Noi abbiamo fin qui supposto che gli elettrodi puntiformi fossero interni, ammettiamo ora che vadano al contorno. Basterà nelle formule (9) e (10) supporre coincidenti i punti A e A_1, ossia

$$\log r_A = \log r_{A_1} \quad , \quad \theta_A = \theta_{A_1},$$

e perciò avremo

$$U = -\Sigma \frac{J}{\pi K} \log r_A$$

$$V = -\Sigma \frac{J}{\pi K} (\cos\beta \cdot \log r_A - \operatorname{sen}\beta \cdot \theta_A) \cos\beta.$$

Ne segue che, se gli elettrodi puntiformi sono al contorno, il campo magnetico non altera la distribuzione delle correnti, mentre altera il potenziale elettrico.

21. Se gli elettrodi sono due A e B, le formule (9) e (10) divengono

$$U = \frac{J}{2\pi K} \left(\log \left(\frac{r_B r_{B_1}}{r_A r_{A_1}} \right) + \lambda(\Omega_{AB} - \Omega_{A_1 B_1}) \right),$$

$$V = \frac{J}{2\pi K} \log \left(\frac{r_B r_{B_1}}{r_A r_{A_1}} \right) - \frac{J}{\pi K} \operatorname{sen}\beta \left(\log \left(\frac{r_{B_1}}{r_{A_1}} \right) \operatorname{sen}\beta + \Omega_{A_1 B_1} \cos\beta \right),$$

ove $\Omega_{AB} = \theta_B - \theta_A$, $\Omega_{A_1 B_1} = \theta_{B_1} - \theta_{A_1}$ sono gli angoli sotto cui si vedono dal punto generico x, y le due coppie di punti A, B e A_1, B_1.

Se i due elettrodi sono al contorno, allora

$$U = \frac{J}{\pi K} \log \frac{r_B}{r_A} \quad , \quad V = \frac{J}{\pi K} \left(\cos \beta \, . \log \frac{r_B}{r_A} - \operatorname{sen} \beta \, . \, \Omega_{AB} \right) \cos \beta \, .$$

22. Allorchè gli elettrodi sono puntiformi il problema è quindi risoluto completamente nel caso in cui la lamina è circolare. Per conseguenza esso si risolverà anche in tutti i casi in cui *l'area occupata dalla lamina sarà rappresentabile conformemente in un cerchio.*

23. Consideriamo il caso in cui gli elettrodi puntiformi sono al contorno, allora, *comunque sia la forma della lamina, purchè essa sia semplicemente connessa, la distribuzione delle correnti non viene alterata dall'azione del campo magnetico.* Ciò dipende dal resultato ottenuto nel caso del cerchio (§ 20) e trasportato in un campo generale semplicemente connesso mediante la rappresentazione conforme, e può ricavarsi anche direttamente dalle condizioni a cui deve soddisfare U (§ 14).

Infatti se il campo è semplicemente connesso e gli elettrodi puntiformi sono al contorno, U è monodromo; al contorno $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$; inoltre, se con un arco di curva qualunque ε stacchiamo la regione ove esiste l'elettrodo dalla rimanente area della lamina, deve aversi

$$\int_\varepsilon \frac{\partial U}{\partial n} \, d\varepsilon = - \frac{J}{K} \, ,$$

ove J è l'intensità della corrente che esce dall'elettrodo. Quindi, se la intensità delle correnti non vengono alterate, U non può differire dal potenziale elettrico nel caso in cui manchi il campo magnetico.

Chiameremo questa proposizione il *principio degli elettrodi puntiformi al contorno.* Evidentemente se la lamina non è semplicemente connessa, la sua area non è rappresentabile conformemente nel cerchio, nè può dirsi che U deve essere monodroma, quindi le dimostrazioni date non valgono più in questo caso, e difatti la proposizione precedente in generale non è vera quando la lamina non è semplicemente connessa (cfr. § 32).

24. Da quanto è stato trovato nel paragrafo precedente resulta che *se noi conosciamo la legge della distribuzione delle correnti in una lamina qualunque semplicemente connessa non soggetta al campo magnetico, allorchè gli elettrodi puntiformi sono al contorno, potremo conoscere* U *onde, applicando le regole del* § 14, *data mediante la* (E'), *potremo avere il potenziale elettrico nel caso in cui agisce il campo magnetico.*

Per esempio: se una lamina rettangolare non è soggetta al campo magnetico noi sappiamo esprimere (secondo i calcoli del Betti) [1], mediante

[1] Betti, *Opere*, vol. II, pag. 267.

la funzione ellittica Δam, la distribuzione delle correnti allorchè gli elettrodi sono nei punti di mezzo di due lati opposti; applicando dunque le precedenti considerazioni potremo risolvere l'analogo problema quando la lamina è soggetta ad un campo magnetico.

25. Abbiansi delle correnti di date intensità che entrano ed escono in una lamina da elettrodi puntiformi al contorno. Supponiamo di non alterare le intensità stesse allorchè si assoggetta la lamina (supposta semplicemente connessa) al campo magnetico.

Se u è la funzione fondamentale prima che esista il campo e U quando esiste il campo magnetico, avremo

$$U = \varrho u ,$$

ove ϱ è il rapporto delle conducibilità della lamina nei due casi, quindi per la regola (E'), indicando sempre con un apice la funzione coniugata di una funzione data armonica,

$$V = \varrho \frac{u - \lambda u'}{1 + \lambda^2} .$$

Conduciamo la rete delle linee di corrente e delle linee equipotenziali nel caso in cui manchi il campo magnetico MN e QP siano linee di corrente, e MQ e NP linee equipotenziali. Avremo

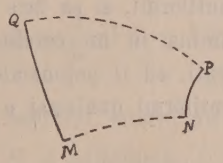


Fig. 13.

$$u_M = u_Q , u_N = u_P \quad , \quad u'_M = u'_N , u'_Q = u'_P ,$$

e per conseguenza

$$V_M - V_N + V_P - V_Q = 0 ,$$

donde il teorema: *Allorchè gli elettrodi puntiformi sono al contorno, se si considera un quadrilatero formato da linee di corrente e di livello corrispondenti al caso in cui manchi il campo magnetico, e si determinano i valori del potenziale elettrico ai quattro vertici allorchè agisce il campo magnetico, la differenza dei valori in due vertici adiacenti è eguale alla differenza negli altri due.*

Questa proposizione che chiameremo il *teorema dei quattro vertici* è suscettibile di facile verifica sperimentale.

26. Supponiamo in particolare che la lamina sia circolare, le correnti entrino ed escano dagli elettrodi puntiformi A e B al contorno. Tracciamo i cerchi che passano per A e B ed i cerchi ortogonali. Qualunque sia il

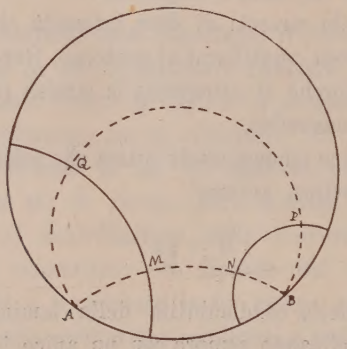


Fig. 14.

campo magnetico per un quadrilatero M N P Q formato con questi cerchi

$$V_M - V_N + V_P - V_Q = 0.$$

27. Il resultato enunciato nel § 22 può notevolmente estendersi; infatti, se si conosce la legge di distribuzione delle correnti in una lamina semplicemente connessa non soggetta al campo magnetico allorchè la corrente entra ed esce da due elettrodi puntiformi, si sa fare la rappresentazione conforme dell'area occupata dalla lamina in un cerchio, onde si saprà determinare la distribuzione delle correnti, ed il potenziale quando le correnti entrano ed escono da elettrodi puntiformi qualsiasi e la lamina è soggetta ad un campo magnetico.

28. Varie fra le proposizioni date valgono tanto se l'area occupata dalla lamina è semplicemente connessa, quanto se è più volte connessa, altre (e lo si è dichiarato esplicitamente volta per volta) non valgono che se si tratta d'un'area semplicemente connessa.

Le formule ed i teoremi di reciprocità dati nei §§ 11, 12, 13 sussistono evidentemente anche nel caso in cui la lamina è più volte connessa. Solo in questo caso essi possono assumere un aspetto alquanto diverso, giacchè le porzioni del contorno ove il potenziale è costante possono essere alcune delle intere linee chiuse il cui insieme forma il contorno totale dell'area più volte connessa, occupata dalla lamina.

Supponiamo la lamina σ limitata da più linee chiuse $s'_1, s'_2, \ldots, s'_n$; s''_1, $s''_2, \ldots, s''_m$, e ammettiamo che le prime siano libere ed isolate, e le seconde siano mantenute ad un potenziale costante. Chiameremo S' l'insieme delle prime linee, ed S'' l'insieme delle altre. Escluderemo per semplicità l'esistenza di elettrodi puntiformi.

Con il campo magnetico diretto i valori del potenziale V in $s_1'', s_2'', \ldots, s_m''$ siano respettivamente $C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots, C^{(m)}$ e con il campo magnetico invertito i valori del potenziale V_1 siano $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, \ldots, C_1^{(m)}$. Denotiamo poi con $J^{(1)}$, $J^{(2)}, \ldots, J^{(m)}$ le quantità di elettricità che penetrano nell'unità di tempo nella lamina attraverso i contorni $s_1'', s_2'', \ldots, s_m''$ allorchè si sperimenta col campo elettrico diretto, e denotiamo con $J_1^{(1)}, J_1^{(2)}, \ldots, J_1^{(m)}$ le quantità di elettricità che penetrano attraverso gli stessi contorni quando si sperimenta col campo elettrico invertito. Applicando i resultati del § 12 avremo

$$\Sigma_h J^{(h)} C_1^{(h)} = \Sigma_h J_1^{(h)} C^{(h)}.$$

Se noi consideriamo $s_1'', s_2'', \ldots, s_m''$ come orli di elettrodi di resistenza trascurabile le $J^{(h)}$ e $J_1^{(h)}$ sono respettivamente le intensità delle correnti che penetrano dagli elettrodi stessi. Dalla precedente relazione si ricavano quindi evidentemente le proposizioni di reciprocità nel caso di elettrodi interni di area finita e di resistenza trascurabile.

29. Ciò premesso consideriamo il caso del campo magnetico diretto, e impieghiamo la regola (E) (§ 14) per passare dal potenziale V alla funzione fondamentale U. Avremo

$$U = V + \lambda V', \tag{12}$$

e se tracciamo una linea chiusa s nell'area occupata dalla lamina

$$\int_s \frac{\partial V'}{\partial s} ds = -\int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds = \frac{1}{K}(J^{(\alpha)} + J^{(\beta)} + \cdots + J^{(\rho)}),$$

denotando con $s_\alpha'', s_\beta'', \ldots, s_\rho''$ i contorni interni alla linea s.

Ne segue che la funzione V' è polidroma, i cicli di polidromia sono quelli che contengono nell'interno i contorni s_α''... ed i moduli di polidromia sono i numeri $\frac{J_\alpha}{K}$.

Poichè V è monodroma (cfr. § 2), U avrà la stessa polidromia di V' salvo che i moduli di polidromia saranno cambiati nel rapporto λ.

30. Applicando le formule (A) e (B) del § 2 si deduce (cfr. § 4)

$$\Sigma_h J^{(h)} = 0 \quad , \quad \Sigma_h J^{(h)} C^{(h)} = K \int_\sigma \Delta V d\sigma.$$

Dall'ultima si ricava che se le $J^{(h)}$ sono zero sopra alcuni dei contorni s_h'' e le $C^{(h)}$ sono zero sopra i rimanenti s_h'', V deve essere nulla; e se si sa che tutte le $J^{(h)}$ sono nulle, V deve essere costante. Se ne conclude che la conoscenza delle $J^{(h)}$ determina V a meno di una costante e la conoscenza di alcune delle $J^{(h)}$ e delle rimanenti $C^{(h)}$ determina completamente V.

Supponiamo che manchino i contorni liberi ed isolati s'_h, e che siano note tutte le $C^{(h)}$, V sarà determinato e sarà indipendente dalla conducibilità K. Se invece sono note tutte le $J^{(h)}$, V cambierà in ragione inversa delle conducibilità K. Se finalmente sono note in parte le $C^{(h)}$, ed in parte le $J^{(h)}$, V dipenderà dalla conducibilità K.

Da tutto ciò segue che se ciascuna delle diverse linee che costituiscono il contorno ha un potenziale costante inalterabile, il potenziale elettrico non dipenderà dal campo magnetico, ma il campo magnetico altererà la funzione fondamentale, e quindi la distribuzione delle correnti.

Ne resulta che se noi conosceremo la distribuzione delle correnti quando manca il campo magnetico, e quindi il potenziale V, mediante la formula (E) potremo calcolare l'alterazione delle correnti stesse.

In modo analogo avremo resultati simili se si suppongono note ed inalterabili le $J^{(h)}$.

Questi ultimi resultati sono in perfetto accordo con quanto aveva già riconosciuto il prof. Corbino nel caso di due contorni a potenziale inalterabile (1). Supponiamo in particolare che i due contorni della lamina siano due circonferenze concentriche di raggi R_1 e R_2. Avremo allora

$$\begin{cases} V = \dfrac{(C^{(1)} - C^{(2)}) \log r + C^{(2)} \log R_1 - C^{(1)} \log R_2}{\log R_1 - \log R_2} \\ V' = \dfrac{(C^{(1)} - C^{(2)})}{\log R_1 - \log R_2}\,\theta \\ U = \dfrac{(C^{(1)} - C^{(2)})(\log r + \lambda\theta)}{\log R_1 - \log R_2} + C\,. \end{cases}$$

ove r e θ sono le coordinate polari dei punti dell'anello circolare che costituisce la lamina avendo preso come origine il centro, e C è una costante.

Se la corrente entra dal cerchio maggiore di raggio R_1, e la sua intensità è I, avremo

$$V = \frac{I}{2\pi K} \log r \;,\quad V' = \frac{I}{2\pi K}\,\theta \;,\quad U = \frac{I}{2\pi K}(\log r + \lambda\theta).$$

31. I resultati del § 29 si possono estendere. Supponiamo in generale di avere una lamina più volte connessa limitata dalle linee chiuse $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Senza fare alcuna ipotesi sui valori del potenziale lungo di esse e sul modo

(1) O. M. Corbino, *Azioni elettromagnetiche dovute agli ioni dei metalli deviati dalla traiettoria normale per effetto di un campo*, Nuovo Cimento, ser. VI, vol. I; E. P. Adams, *Some electromagnetic Effects related to the Hall Effect*, Phil. Magazine, vol. XXVII, Sixth Series; E. P. Adams und A. K. Chapman, *The Corbino Effect*, Phil. Mag., vol. XXVIII, Sixth Series.

come sono disposti lungo di esse degli elettrodi puntiformi o lineari, denotiamo con $J_1, J_2, \dots, J_n$ le quantità di elettricità che nell'unità di tempo entrano nelle lamine attraverso le linee stesse.

Abbiansi poi degli elettrodi puntiformi $M_1, M_2 \dots, M_m$ *interni* da cui penetrano delle correnti di intensità $I_1, I_2, \dots, I_m$. Avremo

$$\sum_1^n J_h + \sum_1^m I_k = 0 ,$$

e se una linea chiusa s interna al campo racchiude nel suo interno le linee $s_\alpha, s_\beta, \dots, s_\tau$, e i punti $M_a, M_b, \dots, M_t$, avremo

$$\int \frac{\partial V'}{\partial s} ds = -\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = \frac{1}{K} (J_\alpha + J_\beta + \cdots + J_\tau + I_a + I_b + \cdots + I_t).$$

Ciò prova che V' e quindi U è polidroma a meno che tutte le $J_1, J_2, \dots, J_n$, $I_1, I_2, \dots, I_m$ non siano nulle. D'onde il teorema

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione fondamentale sia monodroma è che non esistano eletirodi puntiformi interni, e che la quantità totale di elettricità che entra dagli elettrodi distribuiti lungo ciascuna linea chiusa che fa parte del contorno sia nulla.

Nel caso invece in cui l'area occupata dalla lamina sia semplicemente connessa. *basta che non esistano elettrodi puntiformi interni perchè la funzione fondamentale sia monodroma*, mentre la loro presenza la rende polidroma.

32. Diamo subito un'applicazione dei resultati ora ottenuti. Supponiamo che l'area sia più volte connessa e che tutti gli elettrodi siano *puntiformi*, e distribuiti lungo le linee stesse $s_1, s_2, \dots, s_n$ che formano il contorno. Siano $i_p^{(1)}, i_p^{(2)}, \dots, i_p^{(h_p)}$ le intensità delle correnti che entrano dagli elettrodi distribuiti lungo la linea s_p. La condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione fondamentale sia monodroma è che

$$\sum_1^{h_p} {}_t\, i_p^{(t)} = 0 \qquad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Ora se la funzione fondamentale è monodroma noi potremo, ripetendo il ragionamento fatto nel § 23, dimostrare che il campo magnetico non altera la distribuzione delle correnti, mentre se la funzione stessa è polidroma, avremo che l'azione del campo magnetico dovrà far cambiare la distribuzione delle correnti, giacchè quando esso non esiste la funzione fondamentale coincide col potenziale e quindi è monodroma.

Si avrà dunque il teorema seguente:

Se la lamina è più volte connessa e tutti gli elettrodi sono puntiformi e distribuiti al contorno, l'azione del campo magnetico non altererà

la distribuzione delle correnti solo quando la somma delle intensità delle correnti che penetrano dagli elettrodi disposti su ciascuna linea chiusa che forma una parte del contorno sia nulla.

33. Quando la condizione precedente sia soddisfatta, e si conosca la legge della distribuzione delle correnti nella ipotesi che non agisca il campo magnetico, potremo mediante la regola (E') calcolare il potenziale corrispondente allorchè agisce il campo magnetico, precisamente come nel caso del campo semplicemente connesso, e quindi risolvere completamente il problema.

Resta da risolverlo quando la suddetta condizione non sia soddisfatta.

A tal fine denotiamo con s_1 la linea chiusa che forma il contorno esterno della lamina più volte connessa, con $s_2, s_3, \dots s_n$ le linee chiuse che

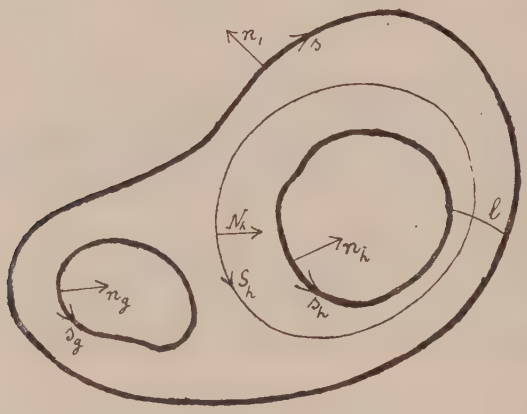


Fig. 15.

formano i contorni interni. Tracciamo una linea l che congiunga s_1 con s_h senza incontrare altre linee del contorno, e immaginiamola sede di una forza elettromotrice 1 diretta nel senso in cui cresce l'arco s_h. Supposto che la lamina non sia soggetta al campo magnetico, il potenziale elettrico φ_h sarà una funzione armonica regolare nel campo occupato dalla lamina stessa che avrà una discontinuità 1 lungo l. Inoltre

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_2} = \dots = 0 \ , \ \int_{s_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial s_h} ds_h = -1 \ , \ \int_{s_g} \frac{\partial \varphi_h}{\partial s_g} ds_g = 0 \ , \ 1 < g \gtrless h .$$

φ_h potrà ancora considerarsi come una funzione armonica finita e continua *polidroma* nel campo liberato dal taglio l i cui cicli di polidromia abbracciano s_h e il cui modulo di polidromia è —1. Le funzioni $\varphi_2, \varphi_3, \dots$ dipenderanno soltanto dalla forma geometrica del campo e le chiameremo i suoi *potenziali ciclici elementari*. Denoteremo con $\varphi'_2, \varphi'_3, \dots$ le loro coniugate (1).

(1) I potenziali ciclici elementari si considerano nella idrodinamica classica per

Ciò premesso supponiamo tolta ogni forza elettromotrice interna nel campo. e chiamiamo W il potenziale elettrico quando le correnti entrano ed escono da elettrodi puntiformi disposti lungo le varie linee chiuse che costituiscono il contorno, V il potenziale elettrico quando agisce il campo magnetico, U la funzione fondamentale.

Sia J_h la somma algebrica delle intensità delle correnti che entrano ed escono dagli elettrodi distribuiti sopra s_h. Se S_h è una linea che abbraccia la sola s_h, avremo

$$J_h = K\int_{s_h} \frac{\partial V}{\partial N_h}\, dS_h = K\int_{s_h} \frac{\partial W}{\partial N_h}\, dS_h = -K\int_{s_h} \frac{\partial V'}{\partial S_h}\, dS_h = -K\int_{s_h} \frac{\partial W'}{\partial S_h}\, dS_h,$$

ove V′ e W′ sono coniugate di V e W.

Ne segue (Vedi formula E)

$$\int_{s_h} \frac{\partial U}{\partial N_h}\, dS_h = \int_{s_h} \frac{\partial (V + \lambda V')}{\partial N_h}\, dS_h = -\frac{\lambda J_h}{K},$$

quindi potremo prendere

$$U = W + \frac{\lambda}{K} \sum_{2}^{n}{}_h J_h \varphi_h,$$

giacchè essa soddisfa a tutte le condizioni a cui deve verificare la U.

Per avere V basta applicare la regola (E′) e otterremo

$$V = \frac{W - \frac{\lambda^2}{K} \sum_{2}^{n}{}_h J_h \varphi'_h - \lambda\left(W' - \frac{1}{K} \sum_{2}^{n}{}_h J_h \varphi_h\right)}{1 + \lambda^2}.$$

Dunque *se si conoscono i potenziali ciclici elementari dell'area più volte connessa occupata dalla lamina, potremo determinare la perturbazione prodotta dal campo magnetico sulle correnti elettriche, qualunque esse siano, purchè entrino ed escano da elettrodi puntiformi situati al contorno.*

Le due formole precedenti ci esprimono il *principio degli elettrodi puntiformi al contorno* modificato nel caso delle lamine più volte connesse (cfr. § 23).

---

ottenere i moti non vorticosi di un fluido in uno spazio più volte connesso limitato da pareti rigide. Essi corrispondono nella teoria della elasticità alle *distorsioni*. Se si conoscono le funzioni regolari armoniche $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n$ tali che ψ_h si annulla sulle $s_1, \ldots s_n$ eccettuata s_h ove ha il valore 1, potremo ottenere (combinandole linearmente con coefficienti costanti) le φ'_h e quindi potremo ricavarne le φ_h. La conoscenza delle φ_h o delle ψ_h è quindi analiticamente equivalente.

34. Consideriamo il caso particolare in cui la lamina sia un anello limitato da due cerchi concentrici.

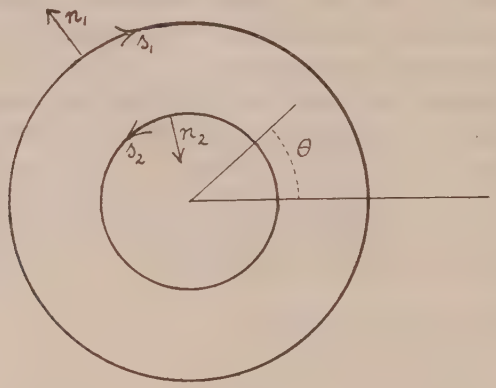


Fig. 16.

In questo caso il potenziale ciclico elementare è $-\frac{\theta}{2\pi}$ ove θ è l'angolo che il raggio vettore spiccato dal centro forma con una direzione fissa

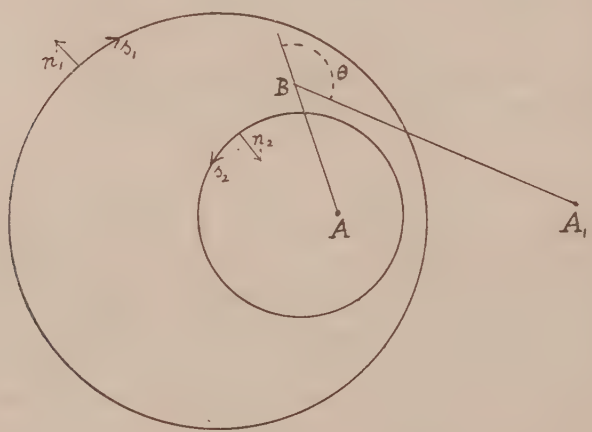


Fig. 17.

la cui funzione coniugata è $\frac{\log r}{2\pi}$. Quindi le formule precedenti divengono

$$U = W - \frac{\lambda}{2\pi K} J_2 \theta \quad . \quad V = \frac{W - \frac{\lambda^2}{2\pi K} J_2 \log r - \lambda \left(W' + \frac{1}{2\pi K} \theta \right)}{1 + \lambda^2} .$$

Se i due cerchi non sono concentrici presi i punti A e A_1 immagini l'uno dell'altro per rapporto ai due cerchi contemporaneamente, il potenziale

ciclico elementare sarà $-\frac{\theta}{2\pi}$ ove θ è il supplemento dell'angolo sotto cui dal punto generico B della lamina si vede il segmento AA_1. La funzione coniugata sarà $\frac{1}{2\pi}\log\frac{AB}{A_1B}$.

Matematica. — *Sulle superficie isoterme come superficie di rotolamento.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

In due Note pubblicate l'anno scorso nei Rendiconti di questa R. Accademia (1) mi sono occupato di due problemi fondamentali che concernono il rotolamento di superficie applicabili nello spazio euclideo, o, più in generale, negli spazî di curvatura costante.

Un punto invariabilmente legato alla superficie rotolante descrive una superficie che diciamo *superficie di rotolamento*; similmente, un piano trascinato nel rotolamento inviluppa una superficie che diciamo *inviluppo di rotolamento*. Secondo i risultati stabiliti in quelle due Note, qualunque superficie Σ può generarsi infinite volte, sia come superficie, sia come inviluppo di rotolamento; e ciascuna volta la ricerca delle infinite coppie corrispondenti di superficie applicabili dipende da un'equazione a derivate parziali del secondo ordine, ad ogni soluzione di questa corrispondendo una tale coppia di superficie applicabili.

La presente Nota ha per iscopo di stabilire che, se la superficie data Σ è *isoterma* (a linee di curvatura isoterme), si possono trovare ∞^4 generazioni della superficie come superficie di rotolamento, integrando il sistema di equazioni differenziali ordinarie che traduce analiticamente le trasformazioni D_m di Darboux delle generali superficie isoterme (2). Per tal modo le trasformazioni D_m vengono ad acquistare un nuovo significato per la teoria del rotolamento, ad ogni tale trasformazione di una superficie isoterma Σ corrispondendo una generazione della Σ come superficie di rotolamento. Una delle due superficie applicabili, quella d'appoggio, è data dalla superficie S, luogo dei centri del corrispondente inviluppo conforme di sfere; la superficie

(1) 1) *Sui problemi di rotolamento di superficie applicabili* (seduta del 4 gennaio 1914); 2) *Sul rotolamento di superficie applicabili, in geometria ellittica ed iperbolica* (seduta del 15 febbraio 1914).

Verranno qui citate come Nota 1), Nota 2).

(2) Cfr. Darboux, *Sur la déformation des surfaces du second degré, et sur les surfaces isothermiques* [Annales de l'École normale supérieure, III série, tom. XVI (1899)].

Ved. anche le mie due Memorie: *a) Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche* [Annali di matematica, serie 3ª, tom. XI (1905)]; *b) Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme* [ibid., tom. XII (1905)].

Qui saranno citate come Memorie *a*) e *b*).

rotolante S_0 è già intrinsecamente definita dalla proprietà: che il sistema coniugato comune alla S_0 ed alla S è quello corrispondente alle linee di curvatura di Σ, e la sua determinazione effettiva discende da quella trasformazione T_m delle superficie isoterme che ho introdotto nella Memoria *b*), come *associata* alla D_m di Darboux.

Nel caso particolare che la superficie isoterma Σ, insieme con la sua trasformata Σ_1, abbia la curvatura media costante (o nulla), la superficie rotolante S_0 è una quadrica rotonda, ed il punto satellite un suo fuoco principale. Si ritrovano così nuovamente i risultati che provengono dalla inversione dei teoremi di Guichard sulle deformate delle quadriche di rotazione [1]. Le generazioni, qui considerate, delle superficie isoterme generali come superficie di rotolamento, ne costituiscono la naturale estensione; solo resta da trattare più da vicino lo studio delle corrispondenti coppie di superficie applicabili, ciò che mi propongo di fare in seguito.

In una prossima seconda Nota dimostrerò che per le superficie *rappresentazione isoterma delle linee di curvatura*, considerate quali inviluppi di rotolamento, sussistono proprietà analoghe ed in certo modo *duali* di quelle qui stabilite per le superficie isoterme.

2. Premettiamo alcune osservazioni generali su quegli inviluppi di ∞^2 sfere (della teoria dei sistemi ciclici) sulle cui due falde Σ, Σ_1 si corrispondono le linee di curvatura; ed osserviamo in primo luogo che:

Sulla superficie S, *luogo dei centri delle sfere, alle linee di curvatura delle due falde* Σ, Σ_1, *corrisponde un sistema coniugato.*

Infatti le normali alla prima falda Σ, dopo riflessione sopra S, si cangiano nelle normali di Σ_1 [2]; e poichè le sviluppabili delle due congruenze di normali si corrispondono per ipotesi, esse tagliano, secondo un teorema di Dupin, in un sistema coniugato la superficie riflettente S.

Viceversa, pel teorema stesso di Dupin, se le normali di Σ tagliano una superficie S in guisa che alle linee di curvatura di Σ corrisponda sopra S un sistema coniugato, le sviluppabili della congruenza di normali si conservano per riflessione, e quindi la superficie S è il luogo dei centri di ∞^2 sfere, di cui Σ è una prima falda dell'inviluppo, e la seconda, Σ_1 corrisponde a Σ per linee di curvatura.

Esprimiamo ora analiticamente la condizione cui deve soddisfare il segmento R di normale a Σ, intercetto fra Σ ed S, affinchè alle linee di curvatura di Σ corrisponda sopra S un sistema coniugato.

Riferita la superficie Σ alle sue linee di curvatura (u, v), e mantenendo le consuete notazioni, ricordiamo le equazioni fondamentali:

[1] Cfr. la mia Memoria: *Sulle trasformazioni delle superficie a curvatura costante* [Annali di matematica, 3ª serie, tom. III (1899)].

[2] Cfr. le mie Lezioni, vol. II, § 253.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{E}\,X_1 \ , \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}X_2 - \dfrac{\sqrt{E}}{r_2}X_3 \ , \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}X_1 \ , \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{r_2}X_1 \ , \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\,X_2 \ , \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}X_2 \ , \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}X_1 - \dfrac{\sqrt{G}}{r_1}X_3 \ , \quad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{r_1}X_2 , \end{cases}$$

e le due equazioni di Codazzi

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right) = \frac{1}{r_2}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right) = \frac{1}{r_1}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} .$$

Essendo ora $M \equiv (u, v)$ un punto variabile sopra Σ, ed M_0 il punto ove la normale in M incontra Σ, poniamo

$$\overline{M M_0} = R = R(u, v) ,$$

e, per le coordinate x_0, y_0, z_0 di M_0, avremo

$$(3)\qquad x_0 = x + RX_3 \quad , \quad y_0 = y + RY_3 \quad , \quad z_0 = Z + RZ_3 .$$

Derivando colle (1), e ponendo

$$(4)\qquad h_1 = \sqrt{E}\left(1 + \frac{R}{r_2}\right) \quad . \quad h_2 = \sqrt{G}\left(1 + \frac{R}{r_1}\right) .$$

otteniamo

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = h_1 X_1 + \dfrac{\partial R}{\partial u}X_3 \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v} = h_2 X_2 + \dfrac{\partial R}{\partial v}X_3 ; \end{cases}$$

indi, per l'elemento lineare ds_0 della S,

$$(6)\qquad ds_0^2 = E_0\,du^2 + 2F_0\,du\,dv + G_0\,dv^2 ,$$

dove

$$(6^*)\qquad E_0 = h_1^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 \quad . \quad F_0 = \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} \quad , \quad G_0 = h_2^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2 .$$

Dalle (5) i coseni di direzione X_0, Y_0, Z_0 della normale alla S risultano proporzionali alle espressioni

$$X_0 \equiv \frac{1}{h_1}\frac{\partial R}{\partial u} X_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial R}{\partial v} X_2 - X_3,$$

ed alle due analoghe. D'altra parte, una nuova derivazione delle (5) dà

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial h_1}{\partial v} X_1 + \frac{\partial h_2}{\partial u} X_2 + \frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} X_3,$$

ed ora esprimiamo che il sistema (u, v) è coniugato sopra S, scrivendo che si ha

$$S X_0 \frac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Per le formole ora scritte, la condizione richiesta si traduce nella equazione per R:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}. \tag{7}$$

3. È importante di osservare, pel nostro scopo, che questa condizione (7), introducendo in calcolo i coefficienti E_0, F_0, G_0 dell'elemento lineare di S, si può scrivere sotto la forma equivalente

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_0 \frac{\partial R}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_0 \frac{\partial R}{\partial v}, \tag{A}$$

od anche, brevemente,

$$R_{12} = 0, \tag{A*}$$

i simboli di Christoffel $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_0, \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_0$, o la derivata seconda covariante R_{12}, intendendosi presi rispetto alla forma differenziale (6).

Che la (A) equivalga alla (7), si vede scrivendo i valori effettivi:

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_0 = \frac{G_0 \frac{\partial E_0}{\partial v} - F_0 \frac{\partial G_0}{\partial u}}{E_0 G_0 - F_0^2}, \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_0 = \frac{E_0 \frac{\partial G_0}{\partial u} - F_0 \frac{\partial E_0}{\partial v}}{E_0 G_0 - F_0^2},$$

poichè, ponendo per un momento

$$\frac{\partial R}{\partial u} = p \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial v} = q \quad , \quad \frac{\partial^2 R}{\partial v\,\partial v} = s,$$

dalle (6*) abbiamo

$$E_0 G_0 - F_0^2 = h_2^2 p^2 + h_1^2 q^2 + h_1^2 h_2^2$$

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_0 = \frac{h_2^2 ps + (h_2^2 + q^2) h_1 \frac{\partial h_1}{\partial v} - pq h_2 \frac{\partial h_2}{\partial u}}{h_2^2 p^2 + h_1^2 q^2 + h_1^2 h_2^2}$$

$$\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}_0 = \frac{h_2^2 qs + (h_1^2 + p^2) h_2 \frac{\partial h_2}{\partial u} - pq h_1 \frac{\partial h_1}{\partial v}}{h_2^2 p^2 + h_1^2 q^2 + h_1^2 h_2^2} .$$

e, conseguentemente,

$$s - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_0 p - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}_0 q = \frac{h_1^2 h_2^2}{h_2^2 p^2 + h_1^2 q^2 + h_1^2 h_2^2} \left\{ s - \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial v} p - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u} q \right\} .$$

Ne risulta appunto che la (A) equivale alla (7).

4. Dalle osservazioni precedenti deduciamo una proprietà relativa alle deformazioni per flessione della superficie S che supponiamo trasporti seco, invariabilmente legati, i segmenti $M_0 M$ normali, negli estremi M, alla superficie Σ. Supponiamo che esista una deformata S_0 della S, tale che nella configurazione S_0 gli estremi M dei detti segmenti si riuniscano in un solo punto O; e dimostriamo che allora: *Il sistema coniugato* (u, v) *di* S, *corrispondente alle linee di curvatura di* Σ, *si conserva coniugato sulla deformata* S_0.

Per dimostrarlo, calcoliamo i coefficienti D_0, D_0', D_0'' della seconda forma fondamentale della S_0, che ha la stessa prima forma fondamentale (6) della S. Siccome, per ipotesi, R è la distanza di un punto variabile sopra S_0 da un punto fisso O, se poniamo

$$\varrho = \frac{1}{2} R^2 , \tag{8}$$

dalle formole relative ai parametri differenziali, calcolate al § 46, vol. I, delle mie Lezioni, risulta

$$D_0 = \frac{\varrho_{11} - E_0}{\sqrt{2\varrho - \Delta_1 \varrho}} , \quad D_0' = \frac{\varrho_{12} - F_0}{\sqrt{2\varrho - \Delta_1 \varrho}} , \quad D_0'' = \frac{\varrho_{22} - G_0}{\sqrt{2\varrho - \Delta_1 \varrho}} ,$$

le derivate seconde covarianti ϱ_{11}, ϱ_{12}, ϱ_{22} ed il parametro differenziale $\Delta_1 \varrho$ essendo calcolati rispetto alla forma differenziale (6). Osservando la posizione (8) e le formole (6*), le precedenti si mutano subito nelle altre

$$D_0 = \frac{R R_{11} - h_1^2}{R\sqrt{1 - \Delta_1 R}} , \quad D_0' = \frac{R_{12}}{\sqrt{1 - \Delta_1 R}} , \quad D_0'' = \frac{R R_{22} - h_2^2}{R\sqrt{1 - \Delta_1 R}} . \tag{9}$$

Ma, essendo soddisfatta la (A), ossia la (A*), ne risulta $D'_0 = 0$, cioè **il sistema (u, v) è coniugato anche su S_0, c. d. d.**

Se ora si osserva che, nelle nostre ipotesi, quando la superficie S_0 rotola sull'applicabile S, il punto O satellite di S_0 descrive la superficie Σ, possiamo enunciare sotto la seguente forma il risultato ottenuto:

Se alle linee di curvatura di una superficie di rotolamento Σ corrisponde un sistema coniugato sulla superficie S *d'appoggio, questo è il sistema coniugato comune alla superficie rotolante* S_0.

5. Nella Nota 1) ho dimostrato che, per trovare le generazioni di una data superficie Σ come superficie di rotolamento, basta riportare sulle sue normali un segmento variabile R che soddisfi ad una certa equazione del 2° ordine, la quale, supposta riferita la Σ alle sue linee di curvatura u, v, assume la forma (I) del n. 3 della Nota 1). Nelle notazioni attuali questa equazione si scrive:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\overline{G}}{R}\frac{\partial R}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\overline{E}}{R}\frac{\partial R}{\partial v}\right) = 1\,\overline{EG}\left\{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right\},$$

ed ogni sua soluzione R fornisce, nella superficie S luogo degli estremi dei segmenti R di normali a Σ, la superficie d'appoggio in una corrispondente soluzione del problema di rotolamento.

Per venire all'oggetto proprio della presente Nota, supponiamo che la superficie data Σ sia isoterma; in tal caso si vedrà che la (I) ammette soluzioni comuni *dipendenti da quattro costanti arbitrarie* coll'altra equazione del 2° ordine (7), ossia

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v},$$

la quale esprime (n. 2) che il sistema (u, v) è coniugato sulla superficie S d'appoggio. E si osservi che, non presentando il sistema delle equazioni simultanee (I) (II) il caso d'involuzione, il numero di quattro costanti è appunto il massimo possibile che può aversi per le soluzioni comuni a due equazioni simultanee del 2° ordine [1].

La ricerca di queste ∞^4 soluzioni, comuni alle equazioni (I) (II) per una superficie isoterma, si identifica colla integrazione del sistema differenziale ordinario, lineare in cinque funzioni incognite, che il Darboux ha dato nella citata Memoria sulle trasformazioni D_m delle superficie isoterme. Abbreviamo la ricerca partendo dal sistema di Darboux ed interpretandolo sotto il nuovo punto di vista.

[1] Cfr. Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.* Tome II, chap. VI, n. 21.

6. Essendo isoterma la superficie Σ, introduciamo parametri isometrici u, v, e poniamo, in conseguenza,

$$\sqrt{E} = \sqrt{G} = e^{\theta}.$$

Il corrispondente sistema di Darboux nelle cinque funzioni incognite $\lambda, \mu, w, \sigma, \varphi$, si scrive:

$$(D)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mu - \dfrac{e^{\theta}}{r_2}w + me^{\theta}\sigma + me^{-\theta}\varphi \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\lambda \\ \dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{e^{\theta}}{r_2}\lambda \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = e^{\theta}\lambda \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial u} = e^{-\theta}\lambda, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\lambda - \dfrac{e^{\theta}}{r_1}w + me^{\theta}\sigma - me^{-\theta}\varphi \\ \dfrac{\partial w}{\partial v} = \dfrac{e^{\theta}}{r_1}\mu \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = e^{\theta}\mu \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial v} = -e^{-\theta}\mu, \end{cases}$$

dove m è una costante arbitraria (non nulla). Il sistema (D) è completamente integrabile e possiede l'integrale quadratico:

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 - 2m\varphi\sigma = \text{cost.}$$

Per ottenere una trasformazione D_m di Darboux, occorre scegliere i valori iniziali (arbitrarii) delle cinque funzioni incognite, in guisa che la costante nel secondo membro della equazione ora scritta sia nulla, e sia quindi

$$(D^*)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + w^2 = 2m\varphi\sigma.$$

Dopo ciò, se si riporta sulle normali di Σ un segmento $R = -\dfrac{\varphi}{w}$, la superficie S, luogo degli estremi, è il luogo dei centri di un inviluppo

(conforme) di sfere di raggio = R, di cui la prima falda è la superficie Σ, e l'altra Σ_1 è una seconda superficie isoterma che corrisponde a Σ per conservazione degli angoli e delle linee di curvatura. Da quest'ultima circostanza segue (n. 2) che il sistema (u, v) è coniugato sopra S: cioè $R = -\frac{\varphi}{w}$ soddisfa alla (II), come del resto è facile di verificare.

Ma noi ora proveremo che, nel tempo stesso, questo valore $R = -\frac{\varphi}{w}$ soddisfa anche a la (I), e per ciò la S è superficie d'appoggio in una generazione della superficie Σ come superficie di rotolamento. Per compiere queste verifiche, si osservi che qui le (4) diventano

$$h_1 = e^{\theta}\left(1 - \frac{\varphi}{w r_1}\right) \quad , \quad h_2 = e^{\theta}\left(1 - \frac{\varphi}{w r_2}\right) ;$$

e formando colle (D) di Darboux le derivate di

$$R = -\frac{\varphi}{w} ,$$

si trova

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -h_1 \frac{\lambda}{w} \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial v} = -h_2 \frac{\mu}{w} .$$

La equazione (I) da verificarsi resta quindi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(e^{\theta}\frac{\lambda}{\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(e^{\theta}\frac{\mu}{\varphi}\right) = e^{2\theta}\left\{\frac{w^2}{\varphi^2} - \frac{w}{\varphi}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right\} .$$

e, eseguendo le derivazioni a sinistra mediante la (D) stessa, vediamo che questa si cangia precisamente nella (D*) ed è quindi verificata.

7. Le proprietà ora riscontrate nelle trasformazioni D_m di Darboux, combinate coi risultati dei numeri precedenti, possono formularsi geometricamente così:

Si consideri un inviluppo conforme di sfere, le cui due falde Σ, Σ_1 sono due superficie isoterme in trasformazione D_m di Darboux, e la superficie S luogo dei centri delle sfere, flessibile ed inestendibile, trasporti seco nelle sue flessioni i segmenti $M M_0$ di normali intercetti fra Σ ed S. Esiste una deformata S_0 della S, per la quale i termini dei segmenti, prima distribuiti sopra Σ, vengono a riunirsi in un punto O, e la deformazione è quella che conserva coniugato il sistema (u, v) della S corrispondente alle linee di curvatura di Σ, Σ_1. Facendo rotolare S_0 sopra S, il punto satellite O descrive la superficie isoterma Σ.

Si vede, adunque, che ad ogni trasformazione D_m di Darboux di una superficie isoterma Σ corrisponde una generazione di questa Σ come superficie di rotolamento, la superficie d'appoggio S essendo il luogo dei centri delle sfere dell'inviluppo conforme. Quanto alla superficie rotolante, essa è già intrinsecamente definita dalla sua seconda forma fondamentale, colle (9) n. 4, e la sua determinazione effettiva si ha colla integrazione di una equazione di Riccati. Per quanto è dimostrato nella Nota 1) al n. 8, la questione si riconduce all'altra di ridurre a *forma normale* del ds'^2 della sfera la forma differenziale quadratica

$$(10) \qquad ds'^2 = e^{2\theta}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{w}{\varphi}\right)^2 du^2 + e^{2\theta}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{w}{\varphi}\right)^2 dv^2 ,$$

che ha appunto la curvatura $K = +1$. Ma si può ad essa dare un'altra interpretazione geometrica, secondo i risultati della Memoria *b*), in quanto essa equivale alla ricerca di un'altra superficie isoterma $\overline{\Sigma}$, trasformata della Σ per la *trasformazione* T_m *associata* alla D_m di Darboux. E infatti questa nuova superficie isoterma $\overline{\Sigma}$ ha l'elemento lineare

$$ds^2 = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}(du^2 + dv^2) ,$$

e le curvature principali

$$\frac{1}{\varrho_1} = w - \frac{\varphi}{r_1} \quad , \quad \frac{1}{\varrho_2} = w - \frac{\varphi}{r_2} .$$

onde appunto il suo ds'^2 sferico rappresentativo è quello dato dalla (10).

8. Da ultimo dimostriamo che i risultati qui ottenuti per le superficie isoterme nello spazio euclideo si trasportano inalterati al caso degli spazii a curvatura costante.

Nella Memoria *b*) ho dimostrato che le trasformazioni D_m di Darboux per le superficie isoterme Σ nello spazio di curvatura costante K_0 (positiva o negativa) dipendono da un sistema differenziale, affatto analogo al sistema (D) n. 6, nel quale sono solo da introdursi due modificazioni:

1°) Nei secondi membri delle formole per $\frac{\partial\lambda}{\partial u}, \frac{\partial\mu}{\partial v}$ deve togliersi il termine $K_0 e^{\theta}\varphi$, lasciando le altre formole inalterate; così:

$$(11) \quad \frac{\partial\lambda}{\partial u} + \frac{\partial\mu}{\partial v} = 2me^{\theta}\sigma - e^{\theta}w\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - \frac{\partial\theta}{\partial u}\lambda - \frac{\partial\theta}{\partial v}\mu - 2K_0 e^{\theta}\varphi .$$

2°) L'integrale quadratico diventa, ora,

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 + K_0\varphi^2 - 2m\varphi\sigma = \text{cost} ,$$

e per ottenere una trasformazione D_m, deve farsi nulla la costante nel secondo membro, onde si avrà:

$$\lambda^2 + \mu^2 + w^2 + K_0\varphi^2 = 2m\varphi\sigma . \tag{12}$$

Per dimostrare che anche qui ad ogni trasformazione D_m corrisponde una generazione della superficie isoterma Σ come superficie di rotolamento. la superficie S luogo dei centri essendo superficie d'appoggio, basta provare. secondo la Nota 2) (n. 2), che il ds^2, dato da

$$ds^2 = e^{2\theta}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{w}{\varphi}\right)^2 du^2 + e^{2\theta}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{w}{\varphi}\right)^2 dv^2$$

ha la curvatura $= +1$.

Posto, adunque,

$$H_1 = e^{\theta}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{w}{\varphi}\right) \quad , \quad H_2 = e^{\theta}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{w}{\varphi}\right) , \tag{13}$$

si deve verificare che si ha

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}\right) + H_1 H_2 = 0 . \tag{14}$$

Se deriviamo le (13), osservando le (D) e le formole di Codazzi

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e^{\theta}}{r_1}\right) = \frac{e^{\theta}}{r_2}\frac{\partial\theta}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e^{\theta}}{r_2}\right) = \frac{e^{\theta}}{r_2}\frac{\partial\theta}{\partial v} ,$$

otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_2}{\partial u} = H_1\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial u} - e^{\theta}\dfrac{\lambda}{\varphi}\right) \\ \dfrac{\partial H_1}{\partial v} = H_2\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial v} - e^{\theta}\dfrac{\mu}{\varphi}\right) , \end{cases}$$

per cui la (14) diventa

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(e^{\theta}\frac{\lambda}{\varphi}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(e^{\theta}\frac{\mu}{\varphi}\right) + \tag{15}$$

$$+ \frac{e^{2\theta}}{r_1 r_2} - e^{2\theta}\frac{w}{\varphi}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + e^{2\theta}\frac{w^2}{\varphi^2} = 0 .$$

Se eseguiamo a sinistra le derivazioni colle formole (D), ponendo mente alla (11), ed all'equazione di Gauss per lo spazio curvo,

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \frac{e^{2\theta}}{r_1 r_2} = -K_0 e^{2\theta} ,$$

si vede che la (15) si riduce all'identità (12), e trovasi perciò verificata.

Mineralogia. — *Due minerali di Baveno contenenti terre rare: weibyeïte e bazzite.* Nota del Corrispondente E. Artini.

Già da qualche tempo l'ing. E. Bazzi, assiduo ed acuto osservatore dei minerali del granito di Baveno, richiamò la mia attenzione sopra alcuni esemplari da lui raccolti in quella classica località. Avendo egli avuto la grande cortesia di offrirmi per lo studio tale interessante materiale, posso ora render noti i risultati delle mie ricerche, non senza profittare della occasione per presentare pubblicamente all'egregio amico i più vivi e cordiali ringraziamenti.

Un primo risultato di queste ricerche è la constatazione della presenza della *weibyeïte* fra i minerali di Baveno. Si tratta di cristallini bipiramidali, rombici, della dimensione massima di 0,3 mm., impiantati ordinariamente sul quarzo. Le facce ne sono brillanti, ma curve; il colore è giallognolo, come si riconosce bene dove il minerale giace sopra una matrice chiara, mentre appare bruniccio, fino a rosso bruno, dove i cristallini riposano su quarzo incrostato da pulviscolo ematitico. A tale patina ematitica, interposta fra il quarzo e la weibyeïte, si deve anzi se i cristallini di questa, non ostante la loro esiguità, possono essere staccati senza rottura.

Al microscopio di polarizzazione si constata che il minerale è biritrangente, biassico; la birifrazione è fortissima; le direzioni di estinzione coincidono sempre con le diagonali delle sezioni rombe.

Posti sovra un portoggetti, e bagnati con una goccia di HCl, i cristallini si sciolgono subito, facilmente e completamente, con viva effervescenza. La soluzione, liberata per evaporazione dalla maggior parte dell'acido in eccesso, e diluita con una goccia d'acqua, dà, con l'aggiunta di un granuletto di acido ossalico, la ben nota reazione del cerio, nella maniera più nitida e sicura. Salvo il ferro, la cui origine è facile a riconoscere, nessuna traccia di altri metalli potei constatare, quantunque abbia a tale scopo sacrificato varî dei non molti cristallini disponibili.

Quanto alla identificazione specifica del minerale, tra i carbonati di cerio noti finora era da escludersi subito, per le proprietà morfologiche ed ottiche, la parisite, già trovata da Tacconi a Montorfano (1). Restavano la weibyeïte di Brögger (2) e la ancilite di Flink (3), rombiche entrambe. Ma

(1) E. Tacconi, *Ulteriori osservazioni sopra i minerali del granito di Montorfano.* Rendic. della R. Acc. dei Lincei, vol. XIV, serie 5ª, fasc. 2°, an. 1905.

(2) W. C. Brögger. *Die Mineralien der Syenitpegmatitgänge der Südnorwegischen Augit-und Nephelinsyenite.* Zeitschr. f. Kryst. XVI, 1890, pag. 650.

(3) G. Flink, *On the minerals from Narsarsuk on the firth of Tunugliarfik in Southern Greenland.* Meddelelser om Grønland, 1899, XXIV, pag. 49 dell'estratto.

quest'ultima ha sviluppo pseudopiramidale, per combinazione di due prismi rombici, come bene si rileva anche dalla fig. 3, tav. III, del Flink, mentre nel nostro minerale, come in quello di Brögger, l'abito è veramente bipiramidale rombico, e le estinzioni diagonali. Il dubbio, quindi, più non era possibile; ma per maggiore sicurezza della determinazione volli tentar di portare al goniometro il più bello dei cristallini da me staccati. Non senza pena potei misurare, sopra due spigoli omologhi, l'angolo (111) . (11$\bar{1}$), ottenendo valori di 94°.40′ e 96°.20′ (media 95°.30′), abbastanza ben corrispondenti al valore dato da Brögger, di 95°.59′. Una sol volta invece, al bagliore incerto delle faccette, curve e striate, potei misurare lo spigolo (111) . (1$\bar{1}$1), trovando un valore di circa 54°, che ricorda non troppo da lontano quello dato da Brögger, di 56°.44′.

La grande rarità del materiale, e la estrema piccolezza dei cristalli mi impedirono ulteriori ricerche; potei solo osservare che il minerale va a fondo nella soluzione di Thoulet concentrata, di $d = 3.19$. Io però credo che quanto sopra esposi giustifichi il riferimento dei nostri cristallini alla weibyeïte. Anche nelle druse pegmatitiche del granito di Baveno, come in quelle di Montorfano, si trovano dunque, benchè in quantità estremamente scarsa, carbonati di terre rare.

Ma assai maggiore importanza mi sembra presentare un'altra specie, tra quelle di Baveno dall'ing. Bazzi notate come critiche e singolari. Si tratta di un minerale che si presenta esso pure assai raramente — fu anzi osservato solo nei frammenti di una unica grande geode — in forma di fascetti prismatici di un bellissimo colore azzurro chiaro, impiantati, con molta muscovite secondaria incrostante a piccole rosette, poca laumontite, e albite in nitidi cristallini limpidi e incolori, su cristalli di quarzo ed ortoclasio roseo.

Lo studio morfologico e ottico fu agevole cosa, trattandosi di prismetti che possono raggiungere anche, in qualche esemplare, due mm. di lunghezza, per qualche decimo di mm. di spessore. I prismi sono esagonali, un poco assottigliati verso l'estremità, che è troncata da una nitida faccetta di base; quando sono fascicolati, all'estremità libera si suddividono in varî sottilissimi, ma nitidi subindividui; talora tendono ad assumere quella forma a bariletto che è tanto caratteristica per i minerali del gruppo della piromorfite.

Non si osserva sfaldatura distinta; ma è facile, rompendo trasversalmente uno dei cristallini, ottenere un moncone giacente sulla base. Si può così constatare, mediante la figura di interferenza, che il minerale è uniassico, con carattere ottico negativo; la figura uniassica si presenta nitida, senza deformazioni od anomalie sensibili. La lucentezza è vitrea; la trasparenza quasi perfetta nei minori individui. La birifrazione è energica; il potere rifrangente forte, all'incirca come nella tormalina; gli strati successivi presentano qualche diversità rispetto alla intensità della colorazione, alla birifrazione e al potere rifrangente. Con miscele di monobromonaftalina e

olio di vaselina potei determinare con sufficiente esattezza ($\pm 0{,}001$) gli indici principali di rifrazione, mediante l'osservazione della linea di Becke. Ottenni:

per il nucleo interno $\varepsilon = 1{,}608$; $\omega = 1{,}626$;
per la zona più esterna $\varepsilon = 1{,}602$; $\omega = 1{,}623$;

valori tutti riferiti, si intende, alla luce di sodio.

Il pleocroismo è bellissimo; e precisamente si ha:

e = azzurro-cielo intenso;
o = giallo verdognolo, estremamente pallido, quasi incolore.

L'assorbimento è dunque inverso di quello, ben noto, della tormalina.

Il p. sp. determinato con la soluzione di Thoulet, sopra alcuni frammenti purissimi, fu trovato = 2,80.

La durezza è = $6\,^1/_2$.

Al cannello il minerale diventa scuro, opaco, lucido di smalto alla superficie, ma non fonde. La reazione del Bo, eseguita tre volte di seguito, con ogni cura, alla fiamma, alternando con prove di confronto su eguali quantità di tormalina, riuscì costantemente e assolutamente negativa.

Dagli acidi forti, salvo il fluoridrico, il minerale è affatto inattaccabile. Fuso con bisolfato potassico, viene scomposto con molta difficoltà; la soluzione solforica, saggiata con H_2O_2, non dà traccia della reazione, tanto sensibile, del TiO_2.

Da HFl fumante, freddo, sopra un portaggetti difeso con balsamo ben cotto, il nostro minerale è abbastanza rapidamente attaccato; dopo lenta evaporazione, si nota la formazione di *pochissimi* nitidi cristalli esagonali di fluosilicato sodico; si intende bene che il balsamo è intatto, e il vetro non attaccato.

Polverizzato e fuso con carbonato sodico secco, il minerale si disaggrega facilmente; riprendendo con HCl secondo il notissimo metodo, si può riconoscere con sicurezza la presenza di SiO_2 come componente essenziale. Il soluto, filtrato, precipita abbondantemente con NH_3; questo precipitato, fioccoso, giallognolo per Fe, lavato, si ridiscioglie facilmente e completamente in HCl diluito, freddo. La più accurata ricerca, anche microchimica, di Al e Be, da me prima sospettati presenti, riuscì sempre assolutamente negativa. Notai invece la presenza di sensibile quantità di Fe, e sopra tutto la formazione di un precipitato relativamente abbondante, bianco, prima fioccoso, che poi diventa cristallino, determinato dalla aggiunta di acido ossalico alla soluzione cloridrica sensibilmente acida.

Constatata così la presenza di notevole quantità di terre rare, non essendo la massa del minerale disponibile sufficiente ad una separazione

completa e sistematica, eseguii una serie di prove microchimiche, sussidiate da numerosissimi saggi di confronto sui composti delle diverse terre rare più importanti, e relative miscele. Nel corso di tali prove giunsi alla persuasione che il reattivo microchimico il quale determina la formazione di prodotti più distinti e caratteristici, e permette le più sicure conclusioni, è ancora l'acido ossalico.

Una goccia della soluzione cloridrica del precipitato ottenuto con NH_3, leggermente acida, con l'aggiunta di un granuletto di $C_2O_4H_2$, lascia prima riconoscere la formazione di aghetti sottili, con viva birifrazione ed estin-

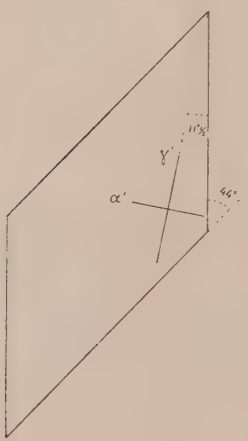


Fig. 1.

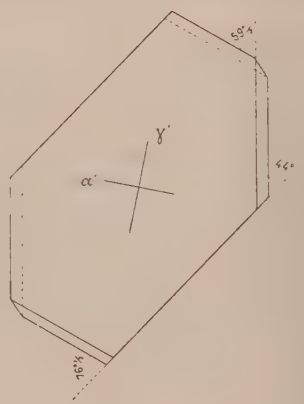


Fig. 2.

zione positiva parallela all'allungamento, riuniti in croci rettangole, o in gruppi stellati a sei raggi, o in ciuffetti raggiati più complessi; l'aspetto e i caratteri di questo prodotto di reazione son proprio gli stessi degli ossalati dei metalli appartenenti al gruppo del cerio.

Ma più abbondante e caratteristico è un altro prodotto, che si forma poco dopo, in cristallini più grossi assai, e meglio distinti, evidentemente perchè il composto è relativamente più solubile. Si tratta di laminette rombe, nitidissime, con angolo di circa 44°; la birifrazione ne è vivissima; la direzione di estinzione otticamente positiva fa un angolo di 11° $^1/_2$ con uno dei lati, nell'angolo acuto del contorno rombico (fig. 1). Quando la sostanza sia più abbondante, e la goccia di soluzione, molto diluita, si lasci concentrare assai lentamente, si possono avere cristallini più grossetti, del tipo di quelli della fig. 2. Questi sono ancora tabulari; la larga faccia su cui riposano è tagliata, oltre che da due facce di un pinacoide quasi normale ad essa (lati lunghi) e dalle due facce di un altro pinacoide ad essa molto obliquo (lati medî, che fanno 44° coi primi), anche dalle due facce, pure

molto oblique, di un terzo pinacoide, le cui tracce (lati corti) troncano non simmetricamente l'angolo acuto della sezione romba formata dai precedenti; gli angoli esterni del contorno esagono sono, come si può rilevare dalla figura, di 44°, 59° $^1/_2$ e 76° $^1/_2$.

L'obliquità dei pinacoidi, visibile nettamente e costantemente (cfr. figura 2), basta a stabilire che i cristalli sono triclini, e non monoclini giacenti su (010), come si poteva sospettare dalla ispezione superficiale delle laminette più semplici e più sottili; in tutte, del resto, si può riconoscere che dalla larga faccia su cui riposano esce una bisettrice dell'angolo degli A. O., con sensibile e costante, per quanto non grande, obliquità. Qualche volta queste laminette si riuniscono a gruppetti raggiati o stellati, di pochi individui.

Più tardi ancora, ai margini del preparato, con la quasi completa evaporazione del solvente, insieme coi cristalli di acido ossalico in eccesso, si nota la formazione di piccolissimi ma nitidissimi rombododecaedri, perfettamente incolori ed isotropi.

Tre volte ho proceduto alla disaggregazione di piccole quantità di materiale puro, non ostante la difficoltà di ottenerlo; e tutte e tre le volte ottenni gli stessi risultati, con nitidezza e precisione mirabili.

Ma con ciò non ero avanzato di molto, perchè non sapevo a quale elemento raro poter attribuire la formazione di così distinti prodotti. Invano avevo sperimentato ripetute volte con acido ossalico sui composti di cerio, lantanio, neodimio, praseodimio, ittrio, erbio, itterbio, zirconio e torio, e loro miscele; mai ero riuscito a ottenere qualche cosa di pur lontanamente simile. Restava da provare lo scandio, al quale, per vero dire, mi facean pensare insistentemente, oltre alla diffusione di tale elemento nei graniti, dimostrata dai recenti lavori spettrografici di Eberhard (1), sopra tutto il peso specifico, relativamente assai basso, del minerale in questione.

Non essendo tuttavia riuscito a procurarmi, nè presso colleghi, nè presso i principali negozianti di prodotti chimici da me interpellati, una piccola quantità di un composto di scandio puro, mi decisi a rivolgermi al prof. R. J. Meyer di Berlino, ben noto per numerosi lavori sulle terre rare, e in modo particolare per il suo metodo di separazione dello scandio dagli altri elementi rari, e per le ricerche sue e dei suoi allievi sopra i composti di questo rarissimo elemento (2). Il prof. Meyer, con gentilezza veramente squisita, della quale gli resterò perennemente e profondamente grato, mi

(1) G. Eberhard, *Ueber die weite Verbreitung des Scandium auf der Erde*, I Sitzb. d. K. preuss. Akad. d. Wiss., an. 1908, XXXVIII, pag. 851; II ibid., an. 1910, XXII, pag. 404.

(2) Ved. riass. tali ricerche nella recente Memoria sintetica: R. J. Meyer, *Ueber das Skandium. Zusammenfassende Mitteilung über Vorkommen, Darstellung und Chemie des Skandiums.* Zeit. für anorg. Chemie, *86*, an. 1914, pag. 257.

mandò subito in dono una notevole quantità di cloruro di scandio puro, di sua preparazione. Con questo prezioso prodotto mi fu agevole di persuadermi che il mio sospetto era fondato: il minerale azzurro del granito di Baveno è realmente un composto di scandio.

Infatti, le soluzioni diluitissime di $ScCl_3 . 6H_2O$, leggermente acide per HCl, saggiate con qualche granulo di acido ossalico, lasciarono sempre riconoscere la formazione di bei cristallini tabulari, a contorno rombico od esagonale, *assolutamente identici*, per valori angolari e per orientazione ottica, a quelli osservati nella soluzione cloridrica del precipitato del gruppo NH_3 ottenuto dal minerale in questione. Nè basta: ai margini del preparato, dopo evaporazione quasi totale, insieme coi cristalli di acido ossalico in eccesso, mi fu agevole di riconoscere anche nei preparati di puro scandio quei piccoli rombododecaedri, così nitidi e così problematici, da me osservati nei primi miei preparati.

Restava da vedersi a che cosa essi potessero attribuirsi; dovendo le lamine rombe riferirsi all'ossalato di scandio $Sc_2 (C_2O_4)_3 . 5H_2O$ già descritto dal prof. R. J. Meyer (« *Enthält die Lösung viel Säure, so bildet sie sich erst allmählich in Form schön irisierender Blättchen* », loc. cit., pag. 284), e non essendo verosimile una così sensibile impurità, comune al mio minerale e al prodotto inviatomi da questo scienziato, mi parve probabile che si trattasse di un sale acido, più solubile, e stabile solamente in presenza di un grande eccesso di $C_2O_4H_2$. Numerose prove microchimiche eseguite sopra soluzioni diluitissime di cloruro di Sc, acide per HCl, con aggiunta di quantità gradatamente crescenti di acido ossalico, mi permisero infatti di riconoscere che, quando l'acido ossalico è scarso, si formano solo ed esclusivamente le tavolette rombe; se l'acido ossalico è in eccesso, ai margini della goccia, dove con la evaporazione si formano i cristalli dell'acido libero, si ha anche sempre formazione di rombododecaedri. Qualora l'eccesso di $C_2O_4H_2$ sia fortissimo, questi ultimi si formano anche nel bel mezzo del preparato, ma sempre da ultimi. Il composto prevalente è dunque dato dalle tavolette rombe od esagone sopra descritte; queste non mancano mai, e formano veramente il prodotto caratteristico della reazione microchimica dello scandio: prodotto che permette di differenziare questo metallo, senza esitazione, da tutti gli altri delle terre rare da me esaminate, e di riconoscerlo anche nelle miscele.

Le dimensioni dei rombododecaedri sono anche notevolmente minori di quelle delle tavolette rombe; in queste la dimensione massima può agevolmente raggiungere mezzo millimetro, mentre i rombododecaedri raramente raggiungono 0,05 mm., e per lo più stanno fra 0,02 e 0,03 mm. Che si tratti di un sale acido, mi par certo; anche perchè tali rombododecaedrini, isolati, separandoli dall'eccesso di acido ossalico libero, e bagnati con pochissima acqua, si scompongono e si intorbidano; con più acqua si sciolgono, ma la

soluzione evaporata non ridà i cristalli primitivi, bensì piccole tavolette rombe. Queste ultime invece, riprese con acqua fino a dissoluzione, si riformano inalterate con la evaporazione.

Da quanto sono venuto esponendo risulta, parmi, che il minerale azzurro di Baveno è un silicato di scandio, con altri metalli di terre rare (cerio?), ferro e poco sodio. Si tratta evidentemente di una specie nuova, importante sopra tutto perchè questo sembra finora essere l'unico minerale nel quale lo scandio sia un componente essenziale (com'è noto, dalle ultime osservazioni di Eberhard risulta che ciò non può dirsi della wiikite). Di una analisi completa e precisa, anche solamente qualitativa, non è il caso di parlare, data la piccolissima quantità di materiale finora disponibile (tutto insieme il materiale puro da me riunito, saccheggiando i pezzi più ricchi messi a mia disposizione dall'amico ing. Bazzi, raggiunse forse sette od otto centigrammi, quasi interamente consumati nei varii saggi analitici); ma poi che la specie è perfettamente identificata morfologicamente e fisicamente, e noti ne sono almeno i principali componenti, credo di essere in diritto di dar ad essa un nome, chiamandola *bazzite*, in omaggio a colui che l'ha scoperta, riconoscendo fra mille e mille esemplari del nostro granito i minuscoli e rarissimi cristallini azzurri, tanto interessanti e degni di studio.

Matematica. — *Formole di derivazione funzionale.* Nota di E. Daniele, presentata dal Socio V. Volterra.

Raccolgo in questa Nota, ed in una successiva, alcune formole che dànno le derivate di funzioni di linee espresse in forma analitica esplicita. Più che altro, veramente, le funzioni che io considero appartengono al tipo delle funzioni composte; e comprendono all'incirca, o si estendono facilmente a comprendere, i più notevoli casi di derivazione di funzioni esplicite, che si trovano sparsi nei lavori dei varii autori, tralasciando quello delle funzioni analoghe ai polinomii, trattato esaurientemente dal prof. Volterra nel cap. I delle *Leçons sur les équations intégrales et les équations integro-différentielles.*

È noto, tuttavia, quanto sia limitato l'insieme di tali casi, e come d'altra parte non si veda, per le funzioni di linee, la possibilità di una classificazione analoga a quella che si fa per le funzioni ordinarie, che permette di compendiare in una tabella di formole tutto quanto occorre per la derivazione di una qualsiasi funzione del tipo algebrico o trascendente elementare. Perciò, una approfondita esposizione del calcolo delle derivate funzionali dovrebbe inevitabilmente rivolgersi alle funzioni implicite, dove il problema si presenta sotto un aspetto molto più vario e più complicato che non nel corrispondente caso delle funzioni ordinarie. Le Note attuali si possono dunque

considerare come costituenti un paragrafo introduttivo, di carattere necessariamente elementare, alla trattazione sistematica di quel problema.

Credo inutile di fare uno speciale richiamo delle definizioni e notazioni adottate: sono quelle che il prof. Volterra adopera nei suoi lavori e nei due volumi di lezioni, che i matematici ben conoscono.

1. Sia

$$(1)\qquad \begin{cases} F(x) = F(f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) \\ f(x) = f|[\psi(\xi), x]|_0^1, \end{cases}$$

cioè F dipenda in modo ordinario da una funzione $f(x)$ e dalle sue prime n derivate, mentre $f(x)$ dipenda a sua volta da tutti i valori di una funzione $\psi(\xi)$ fra 0 e 1, nonchè da una variabile x. Si può allora pensare F come dipendente, oltrechè da x, da tutti i valori che $\psi(\xi)$ assume fra 0 e 1. Ammessa la derivabilità di F rispetto a f, f', ..., $f^{(n)}$, e supposto che f, considerata come funzione di ψ, sia priva di punti eccezionali, vogliamo calcolare la derivata funzionale di F rispetto a ψ.

Diamo a $\psi(\xi)$ una variazione $\chi(\xi)$ di segno costante e infinitesima in un intervallo $(\mu\,\nu)$ compreso fra 0 e 1, e poniamo

$$\sigma = \int_\mu^\nu \chi(\xi)\, d\xi = \text{incremento dell'area corrispondente alla linea } \psi(\xi);$$

inoltre diciamo δf e δF le variazioni di f e F. Avremo, a meno di infinitesimi d'ordine superiore,

$$\delta f = \int_\mu^\nu f'|[\psi(\xi), x, \eta]|\, \chi(\eta)\, d\eta = \sigma\, f'|[\psi(\xi), x, \bar{\eta}]|,$$

dove $\bar{\eta}$ indica un conveniente punto dell'intervallo $(\mu\,\nu)$; e quindi

$$\delta F = \sum_{r=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial f^{(r)}}\, \delta f^{(r)} = \sigma \sum_{r=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial f^{(r)}} \frac{\partial^r}{\partial x^r} f'|[\psi(\xi), x, \bar{\eta}]|.$$

Dividendo i due membri per σ e facendo tendere tutti i punti di $(\mu\,\nu)$ ad uno stesso punto ξ_1, otteniamo infine:

$$(I)\qquad F'|[\psi(\xi), x, \xi_1]| = \sum_{r=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial f^{(r)}} \frac{\partial^r f'|[\psi(\xi), x, \xi_1]|}{\partial x^r}.$$

Come caso particolare assumiamo

$$(1')\qquad F = F(f) \quad , \quad f = f|[\psi(\xi)]|_0^1,$$

cioè F sia funzione ordinaria di una variabile f, che a sua volta dipenda da tutti i valori di una funzione $\psi(\xi)$ fra 0 e 1; la (I) diventa

$$\text{(I')} \qquad F'|[\psi(\xi), \xi_1]| = F'(f) \cdot f'|[\psi(\xi), \xi_1]| .$$

La (I) e la (I') mostrano una perfetta analogia con le formole che valgono per la derivazione delle ordinarie funzioni composte, come pure per la derivazione intesa secondo la definizione del prof. Pascal (1), quando si consideri una linea $f(x)$ funzione di un'altra linea $\psi(y)$ composta mediante una linea $\varphi(t)$.

2. Il caso delle funzioni composte si ha, meglio che non colle (1) e (1') del num. precedente, colle formole

$$\text{(2)} \qquad F = F\,|[\varphi(\overset{b}{\underset{a}{x}})]| \quad , \quad \varphi(x) = \varphi\,|[\psi(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), x]|,$$

le quali permettono di considerare F come dipendente da tutti i valori di $\psi(\xi)$ fra 0 e 1:

$$F = F\,[\psi(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| .$$

Vogliamo la derivata di F rispetto a ψ in un punto ξ_1 nell'ipotesi che *tanto* $F\,[\varphi]$ *quanto* $\varphi|[\psi]$ *siano prive di punti eccezionali*. Diamo a $\psi(\xi)$ una variazione $\chi(\xi)$ come al n. 1; si avrà allora, colle stesse notazioni dianzi adoperate, trascurando infinitesimi d'ordine superiore:

$$\delta\varphi = \int_\mu^\nu \varphi'|[\psi(\xi), x, \eta]|\,\chi(\eta)\,d\eta = \sigma\,\varphi'|[\psi(\xi), x, \bar{\eta}]| .$$

Passando a F, si avrà:

$$\delta F = \int_a^b F'|[\varphi(x), y]|\,\delta\varphi(y)\,dy ;$$

e sostituendo coll'ultima formola:

$$\frac{\delta F}{\sigma} = \int_a^b F'|[\varphi(x), y]|\,\varphi'|[\psi(\xi), y, \bar{\eta}]|\,dy ;$$

al limite, col tendere dell'intervallo $(\mu\,\nu)$ a zero, si ha infine:

$$\text{(II)} \qquad F'\,[\psi(\xi), \xi_1]| = \int_a^b F'|[\varphi(x), y]|\,\varphi'|[\psi(\xi), y, \xi_1]|\,dy .$$

(1) Cfr. le Note: *Sui principii della teoria delle funzioni di linee* (Rend. R. Acc. delle sc. di Napoli, ser. 3ª, vol. XX, 1914).

Come esempio si assuma, nelle (2),

$$\varphi(x) = \varphi\left(\int_0^1 f(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi\,,\,x\right). \tag{2'}$$

cioè φ sia funzione ordinaria dei due argomenti

$$A = \int_0^1 f(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi \quad \text{e} \quad x\,,$$

dove supponiamo che $f(\xi)$ sia una funzione fissa. La (1') ci dà

$$\varphi'\,[\psi(\xi)\,,x\,,\xi_1] = \frac{\partial\varphi(A\,,x)}{\partial A}\,A'\,[\psi(\xi)\,,\xi_1]\,,$$

mentre A' si calcola con formole note (1):

$$A' = f(\xi_1)\,.$$

Finalmente si ha, essendo $\varphi(x)$ data dalla (2'),

$$F'\,[\psi(\xi)\,,\xi_1] = f(\xi_1) \int_a^b F'\,[\varphi(x)\,,y]\,\frac{\partial\varphi(A\,,y)}{\partial A}\,dy\,. \tag{II'}$$

L'ipotesi del caso generale sulla mancanza di punti eccezionali per φ, si riduce ora a quella della derivabilità ordinaria di φ rispetto ad A.

Si può osservare che, se si pone

$$F = F(y_1 \ldots y_n) \quad , \quad y_i = \varphi_i(z_1 \ldots z_m)\,,$$

si ha

$$\frac{\partial F}{\partial z_r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}\,\frac{\partial\varphi_i}{\partial z_r}\,, \qquad (r = 1\,.\,2\,,\,\ldots,\,m)\,.$$

e da questa formola si deduce la (II) col noto passaggio dal finito all'infinito. In particolare, se

$$y_i = \varphi_i(c_1 z_1 + \cdots + c_m z_m)\,,$$

ove le c sono delle costanti, e si pone

$$c_1 z_1 + \cdots + c_m z_m = \zeta\,,$$

si ottiene

$$\frac{\partial F}{\partial z_r} = c_r \Sigma_i \frac{\partial F}{\partial y_i}\,\frac{d\varphi_i}{d\zeta}\,,$$

da cui si deduce la (II').

(1) Cfr. Volterra: *Leçons sur les équations intégrales* etc., ch. I, n. VI.

3. Riprendiamo la $F[\psi]$ definita dalle (2); ma, conservando l'ipotesi che $F[\varphi]$ sia priva di punti eccezionali, supponiamo, invece, che $\varphi[\psi]$ dipenda *specialmente* da $\psi(x)$, e scriviamo (1):

$$\varphi(x) = \varphi\,|[\psi(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), x]|\,(\psi(x)), \tag{3}$$

mentre per $\delta\varphi$ si abbia

$$\delta\varphi = \sigma\,\varphi'\,|[\psi(\xi), x, \overline{\eta}]| + a\,|[\psi(\xi), x]|\,\chi(x).$$

Il δF verrà dato da

$$\delta F = \sigma \int_a^b F'\,[\varphi(x), y]\,.\,\varphi\,[\psi(\xi), y, \overline{\imath}]\,dy + \\ + \int_\mu^\nu F'\,|[\varphi(x), y]|\,.\,a\,|[\psi(\xi), y]|\,.\,\chi(y)\,dy\,;$$

e dal secondo termine del secondo membro si estrarrà pure un fattore σ, per cui si avrà, in definitiva,

$$F'\,[\psi(\xi), \xi_1] = \int_a^b F'\,[\varphi(x), y]\,.\,\varphi'\,[\psi(\xi), y, \xi_1]\,dy + \\ + F'\,|[\varphi(x), \xi_1]|\,.\,a\,|[\psi(\xi), \xi_1]| \tag{III}$$

Assumiamo, in particolare,

$$\varphi(x) = \varphi\left(\int_0^1 f(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi\,,\ \psi(x)\right) \tag{3'}$$

cioè φ sia funzione ordinaria dei due argomenti

$$A = \int_0^1 f(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi \quad \text{e} \quad \psi(x),$$

ove $f(x, \xi)$ è una funzione fissa, e supponiamo che anche x varii fra 0 e 1. Il calcolo diretto, oppure l'applicazione della (I'), conducono alla formola:

$$F'\,|[\psi(\xi), \xi_1]| = \int_0^1 F'\,|[\varphi(x), y]|\,\frac{\partial\varphi(A, \psi(y))}{\partial A}\,f(y, \xi_1)\,dy + \\ + F'\,|[\varphi(x), \xi_1]|\,.\left(\frac{\partial\varphi(A, \psi(\xi))}{\partial\psi}\right)_{\xi=\xi_1}. \tag{III'}$$

Ciò che nel caso generale era indicato con a, qui diventa $\dfrac{\partial\varphi(A, \psi)}{\partial\psi}$.

(1) La notazione è del prof. Volterra: veggasi la seconda delle Note *Sulle funzioni che dipendono da altre funzioni* (Rend. Lincei, 1887, 2° sem., pag. 141).

Come esempio si prenda

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(x, \xi)\, \psi(\xi)\, d\xi + \psi(x);$$

avremo

$$F'\,[\psi(\xi)\,.\,\xi_1] = \int_0^1 F'\,[\varphi(x)\,.\,y]\;.\;f(y\,,\,\xi_1)\,dy + F'\,[\varphi(x)\,.\,\xi_1].$$

Prendiamo invece

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{\int_0^1 \psi(\xi)\, d\xi}\,; \tag{3''}$$

si ottiene:

$$F'\,[\psi(\xi)\,.\,\xi_1] = -\frac{\int_0^1 F'\,[\varphi(x)\,.\,y]\,\psi(y)\,dy}{\left(\int_0^1 \psi(\xi)\,d\xi\right)^2} + \frac{F'\,[\varphi(x)\,.\,\xi_1]}{\int_0^1 \psi(\xi)\,d\xi}\,. \tag{III''}$$

La $F\,[\psi]$, definita dalla $F = F\,[\varphi]$ e dalla (3''), con F funzione arbitraria, dà la soluzione di un'equazione alle derivate funzionali studiata dal prof. Volterra nel num. 2 della Nota *Sulle equazioni alle derivate funzionali* (Rend. Lincei, 1914, 1° sem.). Ricorrendo alla (III''), la verifica della soluzione riesce immediata.

La (3') e la $F = F\,[\varphi]$, che definiscono nel loro insieme la F come funzione di ψ, si possono dedurre, col passaggio dal finito all'infinito, dal sistema

$$F = F(y_1 \dots y_n)$$
$$y_i = \varphi_i(c_{i1}\, z_1 + \dots + c_{im}\, z_m\,,\, z_i)$$
$$(i = 1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,n)$$

che permette di considerare F come funzione di $z_1 \dots z_m$.

Si ha quindi, ponendo

$$c_{i1}\, z_1 + \dots + c_{im}\, z_m = \zeta_i\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}\,\frac{\partial \varphi_i}{\partial \zeta_i}\, c_{ir} + \frac{\partial F}{\partial y_r}\,\frac{\partial \varphi_r}{\partial z_r}\,,$$

dalla quale la (III') è deducibile col solito procedimento.

Matematica. — *Sopra una equazione integro-differenziale del tipo ellittico.* Nota di LUIGI SINIGALLIA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Le equazioni integro-differenziali del tipo ellittico sono state studiate dal prof. Volterra (1). Quella, però, che io qui voglio considerare, non è stata trattata nè dal detto Autore, nè da altri. Ad essa sono applicabili i risultati noti per le equazioni dello stesso tipo, quando si conosca la soluzione fondamentale dell'equazione aggiunta: ed è la determinazione di tale soluzione che forma lo scopo principale di questa Nota.

2. L'equazione di cui qui vogliamo occuparci è la seguente:

$$(1) \qquad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f_{10}(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} f_{01}(t, \tau) \right) d\tau = 0,$$

ove

$$\Delta^2 u(t) = \frac{\partial^2 u(x, y|t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y|t)}{\partial y^2}.$$

Diremo che la funzione $u(x, y|t) \equiv u(t)$ pei valori di t compresi fra 0 e T è nell'area σ limitata dal contorno s, una *soluzione regolare* della (1) quando soddisfa alla (1) e pei detti valori di t ed in tutti i punti (x, y dell'area σ è finita continua assieme con le sue derivate prime e second rispetto ad x, y.

Collo stesso metodo tenuto dal prof. Volterra (loc. cit.) può dimostrarsi che: *a*) ogni soluzione regolare $u(t)$ della (1) è determinata nell'interno dell'area σ pei valori di t compresi fra 0 e T, se si conoscono per gli stessi valori di t i valori della u sul contorno s dell'area stessa; *b*) denotando con n la normale esterna al contorno s, e ponendo

$$(2) \qquad H_s[u, v|\theta] \equiv \int_0^\theta dt \int_s \left(v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) ds +$$

$$+ \int_0^\theta dt \int_t^\theta d\tau \int_s \left(\left[v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial x} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} \right] f_{10}(\tau, t) \cos nx + \right.$$

$$\left. + \left[v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial y} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \right] f_{01}(\tau, t) \cos ny \right) ds,$$

(1) Volterra, *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications* (Acta Mathematica, tom. 35); *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, 1913); *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti* (Rend. Lincei, ser. 5ª, vol. 20, 1° sem. 1911).

se $u(t)$ è una soluzione regolare della (1) e $v(x\,,\,y\,|\,t\,,\,\theta) \equiv v(t)$ è una soluzione regolare dell'*equazione aggiunta*

$$(3) \qquad A^2 v(t) + \int_t^\theta \left\{ \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f_{10}(\tau\,,\,t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} f_{01}(\tau\,,\,t) \right\} d\tau = 0\,,$$

si ha (*teorema di reciprocità*)

$$(4) \qquad H_s[u\,,\,v|\theta] = 0\,.$$

3. Per avere la soluzione fondamentale della (3), cominciamo col considerare le costanti

$$\alpha^{(0)}_{m-p\,,\,p} = \alpha^{(0)}_{p\,,\,m-p} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \frac{\binom{2p}{p}\binom{2m-2p}{m-p}}{\binom{m}{p}}$$

$$\alpha^{(i)}_{m-p\,,\,p} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2(m-i)+1}} \frac{\binom{2p}{p}\binom{2m-2p-2i}{m-p-i}}{i\binom{m-i}{p}}$$

$$(i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,m-p)$$

$$\alpha^{(m-p+i)}_{m-p\,,\,p} = \frac{(-1)^{m+i+1}}{2^{2(p-i)+1}} \frac{\binom{2p}{p}\binom{p}{i}}{(m-p+i)\binom{2i}{i}}$$

$$(i = 0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,p)\,,$$

tra le quali sussistono le relazioni

$$\alpha^{(1)}_{m-p\,,\,p} = \frac{1}{2}\alpha^{(0)}_{m-p-1\,,\,p}\,,\quad \alpha^{(i)}_{m-p\,,\,p} = -\frac{i-1}{i}\alpha^{(i-1)}_{m-p-1\,,\,p}$$

$$(i = 2\,,\,3\,,\,\ldots\,,\,m)$$

$$\alpha^{(0)}_{m-p-1\,,\,p+1} = -(\alpha^{(0)}_{m-p\,,\,p} + 2\alpha^{(1)}_{m-p\,,\,p})\,;\quad \alpha^{(m)}_{m-p-1\,,\,p+1} = -\alpha^{(m)}_{m-p\,,\,p}$$

$$\alpha^{(i)}_{m-p-1\,,\,p+1} = \frac{i+1}{i}\alpha^{(i+1)}_{m-p\,,\,p} - \alpha^{(i)}_{m-p\,,\,p} \quad (i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,m-1)\,.$$

dalle quali si deducono subito le altre

$$\alpha^{(1)}_{m-p\,,\,p} = \alpha^{(1)}_{p+1\,,\,m-p-1}$$

$$\alpha^{(i)}_{m-p\,,\,p} = -\alpha^{(i)}_{m-p\,,\,p-1} - \alpha^{(i)}_{m-p+1\,,\,p-1} \qquad (i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,m-1)$$

$$\alpha^{(i)}_{m-p\,,\,p} = \frac{i-1}{i}\alpha^{(i-1)}_{m-p\,,\,p-1} - \alpha^{(i)}_{m-p\,,\,p-1} \quad (i = 2\,,\,\ldots\,,\,m-1)\,.$$

Per mezzo di queste relazioni si può dimostrare che

$$\sum_{s=i}^{m} \alpha_{m-p,p}^{(s)} \binom{s}{i} = (-1)^i \alpha_{p,m-p}^{(i)} \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\binom{2i}{i-1}}{2^{2i}} \alpha_{m-p,p}^{(i)} = \alpha_{m-p+1,p}^{(0)} + \frac{1}{2} \alpha_{m-p,p}^{(0)} = -\left(\alpha_{m-p,p+1}^{(0)} + \frac{1}{2} \alpha_{m-p,p}^{(0)} \right);$$

dalla prima di queste identità si deduce che

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{m-p,p}^{(i)} = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_{p,m-p}^{(i)},$$

ed in particolare

$$\sum_{i=1}^{2p} \alpha_{p,p}^{(i)} = 0.$$

4. Se $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$, formiamo le funzioni

$$(5) \quad \begin{cases} \psi_{m-p,p} = \alpha_{m-p,p}^{(0)} \log r + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{m-p,p}^{(i)} \left(\frac{y-b}{r} \right)^{2i} & (m \geqq 2p) \\ \psi_{m-p,p} = \alpha_{m-p,p}^{(0)} \log r + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{p,m-p}^{(i)} \left(\frac{x-a}{r} \right)^{2i} & (m \leqq 2p). \end{cases}$$

Si vede subito che i valori dati per $\psi_{p,p}$ dalle due equazioni (5) coincidono.

Si dimostra facilmente che

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_{m-p,p}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_{m-p-1,p+1}}{\partial x^2} \\ \Delta^2 \psi_{m-p,p} = -\frac{\partial^2 \psi_{m-p-1,p}}{\partial x^2} \quad (m-p > 0) \\ \Delta^2 \psi_{m-p,p} = -\frac{\partial^2 \psi_{m-p,p-1}}{\partial y^2} \quad (p > 0). \end{cases}$$

Inoltre, se s è una linea chiusa avente nel suo interno il polo (a, b), ed n è la normale esterna alla linea s, si ha

$$(7) \quad \begin{cases} \int_s \frac{\partial \psi_{m-p,p}}{\partial n} ds = -\int_s \frac{\partial \psi_{m-p-1,p}}{\partial x} \cos nx \, ds \quad (m-p > 0) \\ \int_s \frac{\partial \psi_{m-p,p}}{\partial n} ds = -\int_s \frac{\partial \psi_{m-p,p-1}}{\partial y} \cos ny \, ds \quad (p > 0). \end{cases}$$

5. Le funzioni $f_{10}(t, \tau)$, $f_{01}(t, \tau)$ si suppongono finite ed integrabili pei valori delle variabili che si considerano. Se poniamo

$$f_{i,h}(t, \tau) = \sum_{j=0}^{\varrho} \int_{\tau}^{t} f_{i+j-\varrho, h-j}(t, \sigma) \, f_{\varrho-j, j}(\sigma, \tau) \, d\sigma \quad (\varrho < i+h).$$

e supponiamo nulla ogni f con indici negativi. la funzione $f_{i,h}(t,\tau)$ è indipendente da ϱ: in particolare

$$f_{i,h}(t,\tau) = \int_\tau^t \Big\{ f_{i-1,h}(t,\sigma)\, f_{10}(\sigma,\tau) + f_{i,h-1}(t,\sigma)\, f_{01}(\sigma,\tau) \Big\}\, d\sigma =$$
$$= \int_\tau^t \Big\{ f_{10}(t,\sigma)\, f_{i-1,h}(\sigma,\tau) + f_{01}(t,\sigma)\, f_{i,h-1}(\sigma,\tau) \Big\}\, d\sigma :$$

e se $|f_{10}(t,\tau)| < \mathrm{M}$, $|f_{01}(t.\tau)| < \mathrm{M}$, si ha

$$|f_{i,h}(t,\tau)| < \frac{2^{i+h-1}}{(i+h-1)!}\, \mathrm{M}^{i+h} |t-\tau|^{i+h-1} .$$

Essendo poi

$$|\alpha^{(0)}_{m-p,p}| < \frac{1}{2} \quad ; \quad |\alpha^{(i)}_{m-p,p}| < \frac{1}{2\,i} \quad (i = 1, 2, \dots, m-p)$$

$$\alpha^{(m-p+i)}_{m-p,p}| \leq \frac{1}{2(m-p+i)} \binom{p}{i} \quad (i = 0, 1, \dots, p) ,$$

si ha

$$|\psi_{m-p,p}| < \frac{1}{2} \{ |\log r| + 3^m \} .$$

Segue subito, di qui, che le serie

$$(8) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \psi_{m-p,p} \int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\, \mathrm{F}(\tau)\, d\tau$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \psi_{m-p,p} \int_t^\theta \mathrm{F}(\tau)\, f_{m-p,p}(\tau,t)\, d\tau$$

[ove $\mathrm{F}(t)$ è una funzione limitata integrabile] pei valori considerati di t , θ in ogni campo che non racchiude il polo (a,b) convergono in modo assoluto ed uniforme.

Parimenti, essendo

$$\left| \frac{\partial \psi_{m-p,p}}{\partial x} \right| < \frac{3^m}{r} \quad ; \quad \left| \frac{\partial \psi_{m-p,p}}{\partial y} \right| < \frac{3^m}{r}$$

$$\left| \frac{\partial^2 \psi_{m-p,p}}{\partial x^2} \right| < \frac{2^{2m+1} \cdot m}{r^2} \quad ; \quad \left| \frac{\partial^2 \psi_{m-p,p}}{\partial y^2} \right| < \frac{2^{2m+1} \cdot m}{r^2} ,$$

le serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \frac{\partial \psi_{m-p,p}}{\partial x} \int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\, \mathrm{F}(\tau)\, d\tau ,$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \frac{\partial \psi_{m-p,p}}{\partial y} \int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\, \mathrm{F}(\tau)\, d\tau ,$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \frac{\partial^2 \psi_{m-p,p}}{\partial x^2} \int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\, \mathrm{F}(\tau)\, d\tau ,$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \frac{\partial^2 \psi_{m-p,p}}{\partial y^2} \int_0^t f_{m-p,p}(t,\tau)\, \mathrm{F}(\tau)\, d\tau$$

convergono in modo assoluto ed uniforme in ogni campo che non racchiude il polo (a, b). Lo stesso accade per le serie delle derivate prime e seconde rispetto ad x ed y dei termini della seconda delle serie (8). Concludiamo, così che in ogni campo che non contiene il polo (a, b) le serie (8) sono derivabili, termine a termine, due volte rispetto ad x e due volte rispetto ad y.

6. Posto ciò, si può verificare che la funzione

$$U(x, y, t) \equiv U(t) = F(t) \log r + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \psi_{m-p,p} \int_0^t f_{m-p,p}(t, \tau)\, F(\tau)\, d\tau$$

soddisfa alla (1), e che la funzione

$$V(x, y, t, \theta) \equiv V(t) = F(t) \log r + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \psi_{m-p,p} \int_t^{\theta} F(\tau)\, f_{m-p,p}(\tau, t)\, d\tau$$

soddisfa alla (3); inoltre, se s è una curva chiusa contenente nell'interno il polo (a, b), si ha

$$\int_s \left\{ \frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^{\theta} \left[\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f_{10}(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} f_{01}(\tau, t) \cos ny \right] d\tau \right\} ds =$$
$$= -2\pi F(t).$$

7. Volendo però determinare il valore della soluzione regolare della (1) in un punto (a, b) dell'area σ che assume valori assegnati sul contorno s dell'area stessa, dovremo servirci del teorema di reciprocità. Ora, descrivendo un piccolo circolo c interno all'area σ col centro in (a, b), la (4) ci dà

$$H_s[u, V|\theta] + H_c[u, V|\theta] = 0,$$

donde, facendo tendere a zero il raggio del circolo c, ricaviamo

$$u(a, b|\theta) \equiv u_0(\theta) = \frac{1}{2\pi F(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} H_s[u, V|\theta]. \tag{9}$$

Il secondo membro della (9) contiene i valori di u e delle sue derivate sul contorno s: per eliminare tali derivate, basta, al solito, conoscere una soluzione regolare ω della (3) e tale che $V + \omega$ sia nulla sul contorno s. Si avrà allora la formola

$$u(a, b|\theta) \equiv u_0(\theta) = \frac{1}{2\pi F(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} H_s[u, V + \omega|\theta], \tag{10}$$

che contiene solo i valori di u sul contorno s.

8. Se, invece della (1), si avesse l'equazione

$$\Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f_{10}(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} f_{01}(t, \tau) \right\} d\tau = X(x, y, t).$$

le formole (9) e (10) dovrebbero essere rispettivamente sostituite dalle due seguenti:

$$(9') \qquad u(a\,,\,b\,|\,\theta) \equiv u_0(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{F}(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mathrm{H}_s[u\,,\,\mathrm{V}\,|\,\theta] - \int_0^{\theta} dt \int_{\sigma} \mathrm{V}(t)\,\mathrm{X}(x\,,\,y\,|\,t)\,d\sigma\right\}$$

$$(10') \qquad u(a\,,\,b\,|\,\theta) \equiv u_0(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\,\mathrm{F}(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mathrm{H}_s[u\,,\,\mathrm{V}+\omega\,\theta] - \int_0^{\theta} dt \int_{\sigma} (\mathrm{V}(t)+\omega(t))\,\mathrm{X}(x\,,\,y\,|\,t)\,d\sigma\right\}.$$

Matematica. — *I numeri reali definiti come operatori per le grandezze.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Variazioni della birifrangenza magnetica del ferro colloidale con la temperatura.* Nota di L. Tieri, presentata dal Socio P. Blaserna.

Il Majorana (1), studiando il fenomeno della birifrangenza magnetica in molti campioni di soluzioni colloidali di ferro, trovò l'esistenza di tre tipi diversi di ferro dializzato attivo:

1° tipo: ferro dializzato a netta birifrangenza positiva.

2° tipo: ferro dializzato a birifrangenza negativa.

3° tipo: ferro dializzato che presenta birifrangenza positiva per campi deboli. Successivamente, al crescere del campo, la birifrangenza decresce, e per un certo valore del campo ritorna a zero (punto d'inversione). Per campi più intensi la birifrangenza diventa negativa.

Nel 1903 Schmauss (2), per un campione di ferro Bravais, negativo a temperatura ordinaria, notava una diminuzione di birifrangenza col crescere della temperatura: la birifrangenza si annullava fra 52° e 54°, e diventava positiva a temperature più elevate. Col raffreddamento il liquido riacquistava le proprietà primitive.

In questo lavoro ho studiato come agisce la temperatura sui diversi tipi di ferro dializzato attivo, ottenendo per risultato che ogni campione

(1) Rend. Accad. Lincei, 5ª ser., XII, 1° sem. 1902, pag. 463.

(2) Annalen der Physik, vol. XII, an. 1903, pag. 186.

attivo può passare per tutti e tre i tipi, purchè se ne alteri convenientemente la temperatura. Così, mentre un liquido a birifrangenza magnetica negativa a temperatura ordinaria diventa prima a inversione e poi positivo per riscaldamento, un liquido a birifrangenza positiva a temperatura ordinaria passa al terzo tipo con opportuno raffreddamento; e raffreddato ulteriormente presenta birifrangenza negativa.

Il dispositivo per determinare i valori della birifrangenza del liquido è identico a quello adoperato in altro lavoro (1). Un pennello di luce rossa attraversa un nicol con la sezione principale a 45° rispetto alle linee di forza di una elettrocalamita, una vaschetta di vetro contenente il liquido attivo e posta fra le espansioni polari tronco-coniche dell'elettrocalamita, un compensatore di Babinet e un secondo nicol incrociato col primo. Le frange venivano osservate per mezzo di un cannocchiale. La vaschetta contenente il liquido attivo era collocata nell'interno di una provetta: le temperature basse venivano ottenute con evaporazione di etere posto nella provetta; quelle al disopra della temperatura ambiente, col riscaldamento dell'acqua sostituita all'etere.

Riporto, nella tabella che segue, i valori della birifrangenza, in funzione della temperatura, di due campioni di ferro Bravais positivi alla temperatura ordinaria per un campo magnetico costante di 6400 unità, e di un campione negativo per un campo costante di 3300 unità. I tre liquidi sono distinti con le lettere *A*, *B* e *C*.

(1) Rend. Acc. Lincei vol. XIX, 1° sem. 1910, pag. 377.

Liquido A			Liquido B			Liquido C		
Temperature	Birifragenze in lunghezze d'onda nel rosso		Temperature	Birifrangenze in lunghezze d'onda nel rosso		Temperature	Birifrangenze in lunghezze d'onda nel rosso	
99°	0,05		70°	0,18		95°	0,4	
90	0,15		60	0,3		90	0,55	
80	0,2		55	0,4		80	1	
69,2	0,35		50	0,5		74	1,3	
59	0,5		40	0,7		67	1,2	
55,4	0,6		28.2	0,9		63,6	1	
50,6	0,7		23,4	1		60	0,6	
45,4	0,8		13,4	0,75		58	0,4	
40	1		10	0,45		57	0,3	
37,2	1,1		8	0,25		56	0,2	
34	1,3		6	0,05		54,4	0	con birifr. + per campi deboli
28	1,2		5,4	(2)		53,8	— 0,15	id.
26	1,05		5,2	0	con birifr. + per campi deboli	52	— 0,25	id.
20	0,75		4	— 0,2		48,8	— 0,4	id.
15,6	0,3		2	— 0,45		39	— 0,9	
13,8	— 0,15	con birifr. + per campi deboli	0	— 0,8		34,4	— 1,1	
12,4	— 0,35		— 2	— 1		14,8	— 1,9	
11	— 0,65		— 4	— 1,3		12	— 1,9	
9	— 1		— 6	— 1,6		8	— 2	
7	— 1,5		— 8	— 1,9		0	— 2,1	
1) 5,2	— 1	campo: 3500 unità				— 4	— 2,2	
1,5	— 1,4	id.						
0	— 1,7	id.						
— 2	— 1,9	id.						
— 4	— 1	campo: 2600 unità						
— 6	— 1,3	id.						
— 8	— 1,45	id.						

(1) Essendo il liquido alquanto dicroico, per determinare con esattezza la birifrangenza, in questa e nelle successive misure, adoperai campi più deboli.

(2) Alla temperatura di 5°,4 il liquido presenta debolissima birifragenza positiva, che aumenta con opportuna diminuzione del campo magnetico (liquido a inversione).

La fig. 1, in cui sono riportate le temperature sull'asse delle ascisse e le birifrangenze in lunghezze d'onda sull'asse delle ordinate, si riferisce alla precedente tabella. I punti con i cerchietti appartengono alla curva *A*.

Le birifrangenze del liquido *A* a tali temperature furono dedotte da quelle ottenute sperimentalmente per campi più deboli, applicando la legge di proporzionalità fra birifrangenza e quadrato del campo.

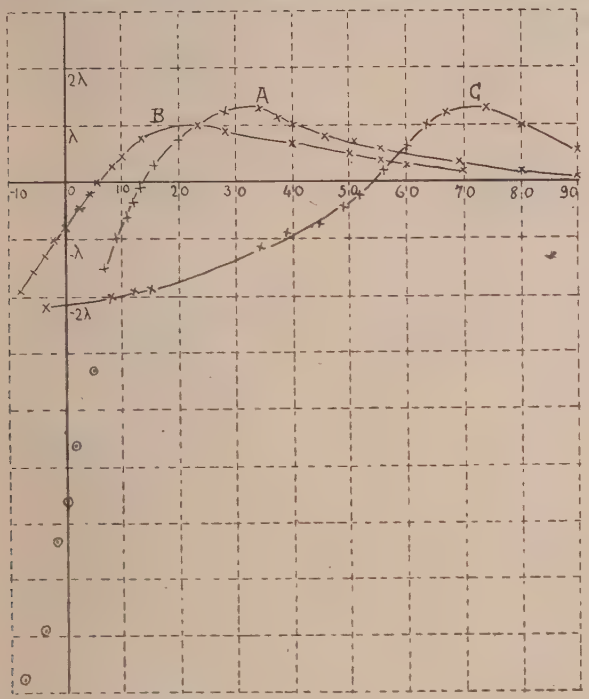


Fig. 1

Nella fig. 2, in cui sono riportati i campi in migliaia di unità sull'asse *X* e le birifrangenze in lunghezze d'onda sull'asse delle *Y*, sono disegnate le curve di birifringenza del liquido *A* per un campo magnetico variante fra 0 e 17000 unità, alle temperature di 12°,8, 14°,4, e 59°; e per un campo variante fra 0 e 10000 unità alle temperature di 7° e 34°. A queste temperature non si potè determinare la birifrangenza per campi più intensi a causa del dicroismo.

Dai diagrammi della fig. 1 e da quelli ottenuti per altri liquidi attivi, si traggono le seguenti conclusioni:

Ogni soluzione colloidale di ferro, che presenti birifrangenza magnetica, acquista per un determinato campo la massima birifrangenza negativa alla temperatura di solidificazione della soluzione colloidale.

Col crescere della temperatura, la birifrangenza negativa va diminuendo e si annulla, per un determinato campo magnetico, ad una temperatura che varia da liquido a liquido.

Per temperature prossime a quella per cui il liquido è inattivo per un determinato campo, il liquido è a inversione.

Aumentando ulteriormente la temperatura, il liquido presenta birifrangenza positiva, la quale aumenta con la temperatura, raggiunge un massimo, e poi diminuisce.

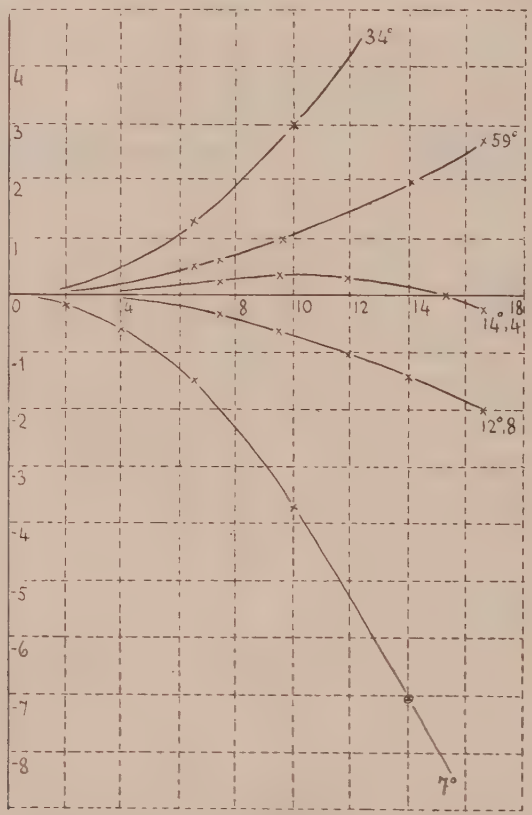


Fig. 2

Quando la soluzione colloidale attiva non presenta sufficiente trasparenza, si suole diluirla in acqua. I liquidi positivi di cui dispongo presentano maggiore attività se si diluiscono con alcool invece che con acqua. Nella fig. 3, sull'asse delle X sono riportate le temperature, e sull'asse delle Y le birifrangenze in lunghezze d'onda per un campo costante di 6400 unità. Il diagramma (1) si riferisce al liquido B diluito con acqua; il diagramma (2) allo stesso liquido diluito in alcool a parità di volumi. E siccome la temperatura di solidificazione della soluzione in alcool è molto più bassa, la curva di birifrangenza può essere prolungata al di là di -8°; e si

ottengono in tal modo liquidi a forte birifrangenza negativa. Così, p. es., il liquido *B* diluito in alcool, alla temperatura di -15° dà una birifrangenza negativa di una lunghezza d'onda per un campo di 1300 unità.

L'ipotesi di Schmauss, confermata da Cotton e Mouton, che fa dipendere la birifrangenza magnetica del ferro dializzato dalla grandezza dei granuli (i granuli più grossi dànno birifrangenza positiva; quelli più piccoli birifrangenza negativa), potrebbe spiegare il comportamento dei diversi tipi di ferro dializzato attivo col variare della temperatura, qualora si ammetta che la birifrangenza passi dall'un segno all'altro, a causa della dilatazione termica

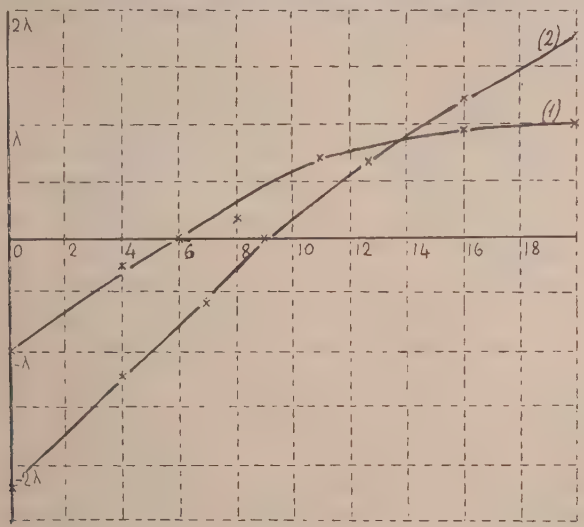


Fig. 3.

dei granuli. La stessa ipotesi spiegherebbe l'aumento di birifrangenza di un liquido a birifrangenza positiva quando si diluisce con alcool, ammettendo che l'alcool determini una diminuzione di grandezza di tutti i granuli. Siccome nel liquido sono presenti granuli a birifrangenza negativa, granuli a birifrangenza positiva e granuli più grossi che non presentano birifrangenza, per la diminuzione di grandezza di tutti i granuli, parte dei positivi diventano negativi e parte degli inattivi passan positivi in modo da avere un aumento di granuli attivi nella soluzione.

L'esame ultramicroscopico non rivela nessuna differenza nella grandezza dei granuli dei liquidi a birifrangenza positiva e di quelli a birifrangenza negativa. Però nei liquidi attivi, qualunque sia il segno della birifrangenza, i granuli sono appena visibili e in numero grandissimo.

Le soluzioni colloidali di ferro che non presentano birifrangenza magnetica, all'esame ultramicroscopico si rivelano o poverissime di granuli o ricche di granuli grossi.

Fisica. — *Su alcune conseguenze della teoria generale del fenomeno di Hall* (1). Nota di G. Tasca Bordonaro, presentata dal Socio V. Volterra.

Il prof. Corbino studiando il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico, ottenne le relazioni che legano la intensità della corrente che traversa la lamina alla distribuzione del potenziale V. Ne dedusse che la funzione V soddisfa alla condizione $\Delta^2 V = 0$, e che al contorno libero della lamina, come anche su ogni linea di flusso, è nulla la sua derivata rispetto a una direzione l che fa con la normale un angolo β costante in tutta la lamina. Partendo dalle formole del Corbino, il prof. Volterra volle risolvere il problema della distribuzione dei potenziali e delle correnti in una lamina che venga sottoposta all'azione di un campo magnetico.

Fra le conseguenze dei suoi sviluppi analitici suscettibili di immediata verifica sperimentale, è molto caratteristica quella che estende alla lamina nel campo, in un certo senso, il principio di reciprocità. Egli potè infatti stabilire che, « se in una lamina conduttrice si fa passare una corrente j sotto l'azione di un certo campo magnetico, ed in due punti A′ e B′ si ha una certa differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i potenziali dei punti A e B quando si faccia entrare da A′ e uscire da B′ la stessa corrente d'intensità j, e *s'inverta il campo* ». In altri termini la legge di reciprocità, che vale fuori del campo, continua a sussistere quando sulla lamina agisca un campo magnetico, cioè quando la primitiva distribuzione dei potenziali venga modificata per il sovrapporsi di cariche Hall, a condizione che, invertendo gli elettrodi, si inverta anche il campo.

Mi sono proposto di avere la conferma sperimentale di questo notevole risultato.

Adoperai a questo scopo la grande elettrocalamita Weiss esistente nell'Istituto fisico di Roma, con espansioni piane aventi il diametro di cm. 10, e alla distanza di cm. 1.4; in queste condizioni, per una corrente di 4 ampère si ottiene un campo di circa 6700 Gauss. La lamina era della forma indicata nella (fig. 1), con gli elettrodi saldati nei punti indicati nella figura; i filini adduttori erano protetti con tubi di gomma, ad evitare che dei contatti con le espansioni polari potessero turbare le misure.

Questi filini venivano rilegati due a due secondo l'ordine voluto ai serrafili di due interruttori a mercurio a sei pozzetti, essendo gli attacchi

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

centrali di questi rispettivamente rilegati ai poli di una batteria di accumulatori ed ai capi del galvanometro; riusciva in questo modo agevole il potere permutare gli attacchi degli elettrodi tra la batteria ed il galvanometro, e viceversa.

Allo scopo di mantenere la corrente costante nella lamina al permutare degli attacchi, nel circuito che rilegava la lamina alla batteria era inserita una resistenza zavorra di circa 100 ohm, in modo da potersi ritenere trascurabili le variazioni di resistenza nel circuito stesso al permutare degli elettrodi. Le misure si facevano leggendo con cannocchiale e scala le

Fig. 1.

deviazioni in un galvanometro di Hartmann e Braun a bobina mobile. Si procedeva nel modo seguente:

Si mandava prima la corrente nell'elettrocalamita, notando in queste condizioni lo zero del galvanometro, e si chiudeva quindi il circuito della lamina, leggendo la prima deviazione subìta dal galvanometro, che si può ritenere esclusivamente dovuta ad effetto Hall, perchè ancora ad esso non si sono sovrapposti gli effetti secondarî dovuti al riscaldarsi degli elettrodi e alle disuguaglianze di temperatura create nella lamina.

Ecco i risultati ottenuti con un campo di 6000 Gauss ed una intensità di corrente nella lamina di amp. 0,2:

	Elettrodi I — III	Elettrodi II — IV
Campo diretto	$V_{II} - V_{IV} = 420$	$V_I - V_{III} = 104$
Campo invertito	$V_{II} - V_{IV} = 104$	$V_I - V_{III} = 420{,}5$

Questi numeri dimostrano chiaramente che è vera la legge di reciprocità, e, come richiede la teoria del prof. Volterra, solo quando al permutare degli elettrodi s'inverta anche il campo; la dissimmetria dell'effetto senza

la inversione del campo è anzi per la lamina da me adoperata molto sensibile. Della necessità d'invertire il campo, come ebbe a osservare il prof. Corbino in una seduta della Società italiana di fisica, si può dare la seguente spiegazione intuitiva:

Se immaginiamo che la corrente entri per l'elettrodo II uscendo per IV, e la direzione del campo è tale che le cariche positive vengano spinte per effetto Hall verso la destra di un osservatore che guardi nel senso della corrente, allora l'elettrodo III che anche in assenza del campo per essere più vicino al punto per cui entra la corrente, si trova ad un potenziale più elevato dell'elettrodo I, riceverà nuove cariche positive che ne eleveranno ancora il potenziale rispetto ad I. Se noi permutiamo gli attacchi della batteria

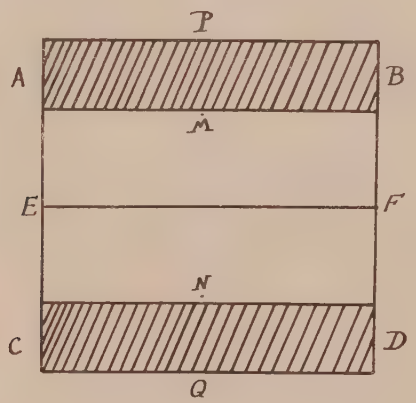


Fig. 2.

per modo che la corrente entri per l'elettrodo III uscendo per I senza invertire il campo, l'elettrodo II si porterà ad un potenziale più elevato, ma l'azione del campo sarà tale da accumulare le cariche positive nell'elettrodo IV portando una depressione alla differenza di potenziale già esistente. In altri termini, perchè l'effetto Hall si sommi o si sottragga sempre alla differenza di potenziale già esistente per la dissimmetrica disposizione degli elettrodi, è necessario anche che si inverta il campo al permutare degli elettrodi.

Fin qui si è trattato di elettrodi puntiformi; ma la teoria del prof. Volterra ci dice che la legge di reciprocità sussiste sempre, anche quando si tratti di elettrodi estesi a potenziale costante, saldati al contorno od all'interno della lamina stessa. Per ottenerne la conferma sperimentale, adoperai un rettangolo di bismuto (fig. 2), con elettrodi di rame saldati lungo i due lati opposti di maggiore lunghezza; mentre nel centro dei due lati liberi erano saldati due filini di rame.

i risultati ottenuti:

	Elettrodi P, Q	Elettrodi E, F
Campo diretto	$V_E - V_F = 51{,}5$	$V_P - V_Q = 54$
Campo invertito	$V_E - V_F = 54{,}5$	$V_P - V_Q = 51$

Anche in questo caso sussiste la legge di reciprocità e l'enunciato del prof. Volterra è completamente verificato.

Nel voler mettere in evidenza la reciprocità invece che con elettrodi, quasi puntiformi, con elettrodi di rame estesi ed al contorno, notai che l'effetto Hall era molto minore di quello che ottenevo con la lamina dissimmetrica, mentre date le condizioni dell'esperienza, si sarebbe dovuto avere nel secondo caso un effetto maggiore.

Già il prof. Corbino aveva notato che per la presenza di elettrodi di piccolissima resistenza saldati al contorno nel caso del rettangolo, l'effetto Hall, massimo al centro del contorno libero, decresce con la legge parabolica fino a zero quando ci si avvicini agli elettrodi di rame; e che anche nel centro si avrà una depressione proporzionale a

$$\int_N^M j_j \, dy ,$$

in cui N e M rappresentano due punti opposti corrispondenti al contorno libero. Questo integrale ha un valore diverso da zero, perchè Jy ha un segno costante lungo l'asse del rettangolo. Ho cercato di trovare il valore di questa depressione: ed a questo scopo feci prima delle esperienze con un rettangolo di bismuto posto in un campo di circa 6000 unità, e ripetendo il procedimento adottato per la verifica della reciprocità.

Le dimensioni del rettangolo erano: EF. = mm. 52, AC. = mm. 22 (fig. 2).

S'inviava prima la corrente per i due elettrodi di rame P e Q saldati lungo AB e CD, misurando la differenza di potenziale sui punti EF; si toglievano quindi gli elettrodi di rame e si ripetevano le misure inviando invece la corrente per gli elettrodi quasi puntiformi M ed N.

Ecco i risultati ottenuti:

Grandi elettrodi rame; effetto Hall aduttori . .	52,5
Elettrodi puntiformi	318

Questi risultati dimostrano chiaramente che la presenza di elettrodi di rame saldati lungo il contorno, i quali fanno da corto circuito alle cariche di Hall dando luogo a delle correnti vorticose in seno alla lamina stessa,

deprime l'effetto Hall riducendolo, nel nostro caso, a *quasi un sesto del suo valore normale*. Ho definito *valore normale* dell'effetto Hall quello ottenuto con elettrodi adduttori puntiformi applicati al contorno. Questa denominazione si basa sulle seguenti considerazioni:

Il prof. Volterra ha dimostrato che con elettrodi adduttori puntiformi applicati al contorno di una lamina di forma qualsiasi, le linee di corrente sotto l'azione del campo restano quelle che si avevano senza campo. Questo risultato è della più grande importanza ai fini della determinazione della costante di Hall.

E infatti il prof. Corbino ha stabilito che quando le linee di corrente sono le stesse con o senza campo, l'effetto Hall tra due punti del contorno inizialmente allo stesso potenziale diviene, qualunque siano quei due punti:

$$\frac{\varepsilon}{\varkappa^2 + \varepsilon^2} J ,$$

dove J è la corrente totale, per unità di spessore, che traversa la lamina. Esso è perciò identico, a parità della corrente totale, con quello che si sarebbe ottenuto in un rettangolo senza la perturbazione degli elettrodi, cioè con l'effetto Hall normale, pur essendo stato misurato con una lamina di forma qualsiasi, e con elettrodi puntiformi, comunque disposti, purchè al contorno.

Si può dire in altri termini, che l'esperienza eseguita in tal modo permette di avere tang β per qualunque lamina, e appunto questa è la costante galvanomagnetica caratteristica del metallo e del campo. Tale costante non può essere ottenuta con elettrodi estesi applicati al metallo, ed è identica a quella che si può misurare con gli effetti elettromagnetici dovuti al disco percorso da correnti radiali, quali furono descritti e calcolati dal prof. Corbino.

Volendola misurare ricorrendo all'effetto Hall, si sarebbe dovuto ricorrere a elettrodi di resistenza elevatissima, mentre lo stesso risultato si ottiene, in seguito al teorema del prof. Volterra, con semplici elettrodi puntiformi al contorno.

È degno di nota, dal punto di vista storico, che questa disposizione corrisponde in fondo a quella originaria di Hall, in seguito abbandonata dagli sperimentatori che avevan creduto di porsi in condizioni teoricamente più semplici col rettangolo munito di larghi elettrodi su due lati.

È interessante inoltre il notare con quale meccanismo si conservi la legge di reciprocità nel caso di larghi elettrodi di rame:

Gli elettrodi di rame che quando funzionano da adduttori della corrente fanno da corto circuito alle cariche Hall deprimendole, assorbono invece buona parte della corrente quando, permutando gli elettrodi, funzionano da adduttori gli elettrodi puntiformi; ne segue che la intensità di corrente che

traversa il bismuto è solo una frazione della totale inviata, e quindi l'effetto Hall deve anche in questo caso essere depresso. La teoria dimostra e l'esperienza conferma che la depressione è identica nei due casi, ciò che non si sarebbe potuto prevedere per via intuitiva.

Ho ripetuto le esperienze invece che col rettangolo, con un quadrato di bismuto, mettendomi così in condizioni più vicine a quelle dei varî sperimentatori che hanno studiato il fenomeno di Hall specialmente per la determinazione delle costanti elettroniche.

Era infatti utile determinare quanto potè pesare nella misura dell'effetto Hall la presenza di elettrodi saldati al contorno.

Ecco i dati dell'esperienza:

Elettrodi grandi di rame;	effetto Hall	. . . . .	138
» puntiformi;	»	»	192

Mentre adoperando il rettangolo l'effetto era appena un sesto del totale, col quadrato la depressione è del 27 % circa, ma è sempre di tale entità da infirmare i risultati finora ottenuti nella determinazione della costante di Hall.

Non è quindi improbabile che il diverso comportamento del bismuto, notato da parecchi autori, sia anche dovuto alla diversità delle condizioni sperimentali relative alla forma della lamina e alla presenza degli elettrodi.

Nè meno notevole è l'influenza che un così forte errore nella valutazione della costante di Hall può avere apportato nei calcoli delle costanti elettroniche di Drude, specialmente per quanto riguarda gli ioni positivi.

Paleontologia. — *Spugne perforanti fossili della Patagonia e di altre località del territorio argentino* [1]. Nota del dott. Paolo Principi, presentata dal Corrisp. Art. Issel.

Lo studio delle spugne perforanti ha avuto un indirizzo sicuro e preciso col Topsent [2], il quale prese in considerazione la struttura dello scheletro e delle singole spicule, anzichè la forma e l'aspetto esterno del corpo, caratteri che possono essere assai variabili anche nella stessa specie. Infatti, talvolta la spugna dà luogo ad un reticolato che è contenuto nelle gallerie da essa scavate: e si ha allora una forma *reticolata*. In altri casi il supporto, su cui vive l'animale, essendo perforato in tutta la sua estensione, la stessa spugna per continuare ad accrescersi diviene *rivestente*; se,

[1] Lavoro eseguito nel R. Museo geologico dell'Università di Genova.

[2] Topsent E., *Contributions à l'étude des Clionides*, Arch. de zoologie exspériment., vol. V *bis*, an. 1887-1890; vol. IX, an. 1891.

infine, il sostegno è globoso. essa può completamente rivestirlo, ed assume quindi una forma *massiccia*.

In Italia il primo a seguire il metodo del Topsent fu il Rovereto (1), il quale descrisse anche una nuova specie di *Thoosa*. la *T. sabatia*. rinvenuta nel Neogene ligure.

Seguendo la nomenclatura esposta dal Delage (2), distingueremo due categorie di spicule: le *megasclere*, che sono di grandi dimensioni e servono di sostegno all'impalcatura generale del corpo; e le *microsclere*, di piccole dimensioni e che si possono considerare come spicule accessorie.

Fino al 1905 i generi, in cui si ripartivano le spugne perforanti, erano tre: *Cliona* (sinonimo di *Vioa*) (3), caratterizzato per la presenza di megasclere; *Thoosa*, senza megasclere e con particolari spicule dette *amphiaster*; *Alectona*, con *oxe* coperti di tubercoli regolarmente disposti. A questi tre generi dobbiamo però aggiungerne altri due descritti nel 1905: *Clionopsis* del Thiele (4), affine alle Clione, e *Clothoosa* del Topsent (5) in cui mancano le microsclere somiche, e gli *aster* coanosomici sono dei veri e proprii *amphiaster*.

Le spugne perforanti studiate nel presente lavoro mi furono comunicate dal prof. G. Rovereto, che le raccolse nei suoi viaggi in Argentina. Esse appartengono tutte al gen. *Cliona*; e quindi noi fermeremo la nostra attenzione su questoi genere, che è anche il più importante e numeroso del gruppo.

Le nuove specie di *Cliona* viventi, illustrate dopo la pubblicazione del Rovereto sono la *Cliona armata* Topsent (6), la *C. margaritifera* Dendy (7), la *C. chilensis* Thiele (8), e la *C. velans* (9) Hentschel.

La specie vivente più diffusa è la *Cliona celata* Topsent, a cui debbono riferirsi anche alcune spugne descritte come entità distinte, ma che invece rappresentano delle modificazioni della Cliona suddetta. Così la *Papillina suberea* O. S., la *Papillina nigricans* O. S., e la *Papillina visa-*

(1) Rovereto G., *Briozoi, anellidi e spugne perforanti del Neogene ligure.* Palaeontographia italica, vol. VII, an. 1901.

(2) Delage et Hérouard, *Traité de zoologie concrète*, vol. II, parte 1ª, an. 1899, pag. 231.

(3) L'appellativo di *Cliona*, stabilito dal Grant nel 1826, deve avere la priorità su quello di *Vioa* posto dal Nardo nel 1839.

(4) Thiele, I. Zoolog. Jahrbucher, Iena, an. 1905, vol. III suppl., pag. 412.

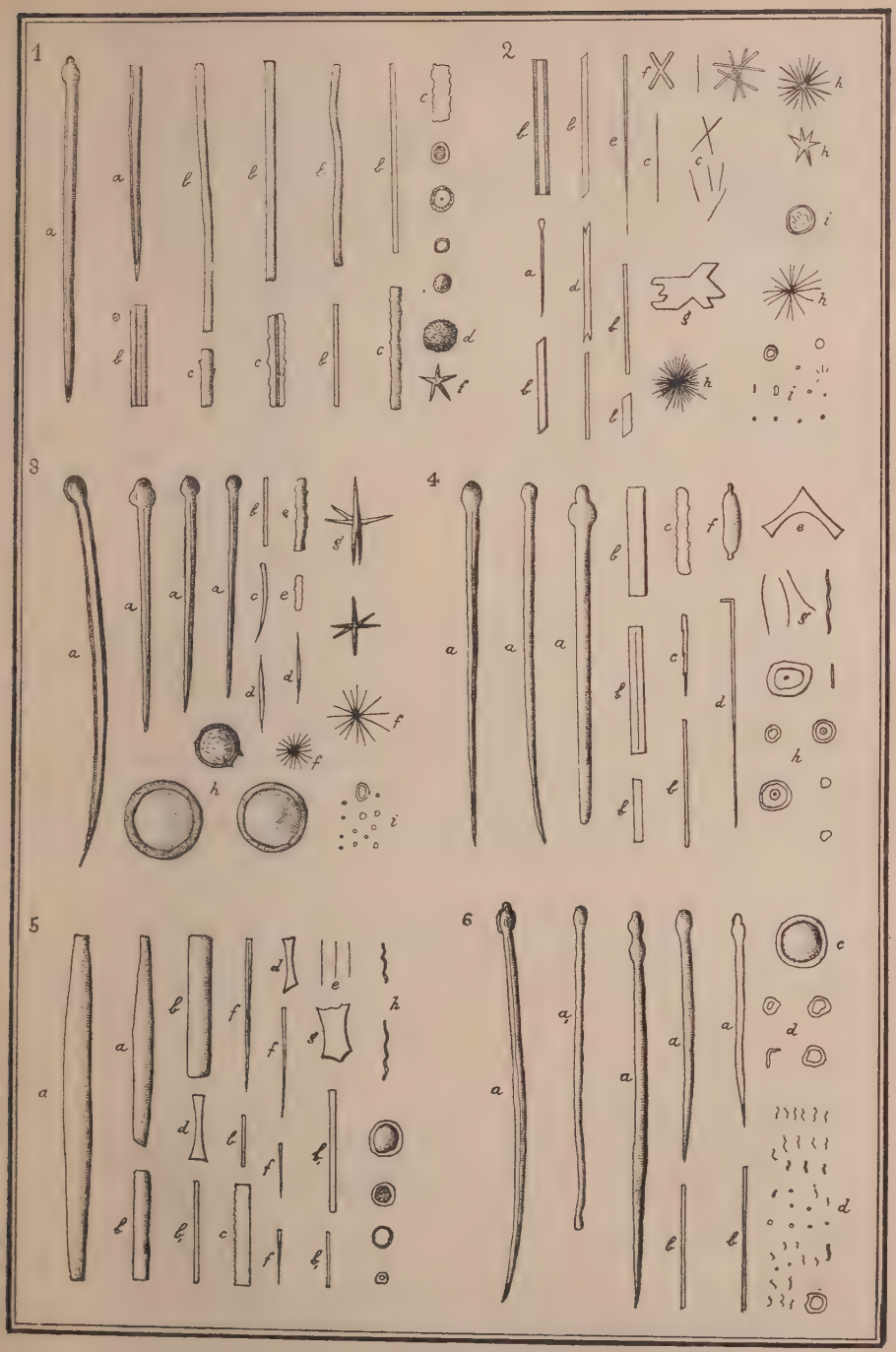
(5) Topsent, *Bullettin du Muséum de Paris*, an. 1905.

(6) Topsent, *Résultats des campagnes scientifiques accomplies sur son yacht par Albert I*, fascicule XXV, an. 1904, Monaco.

(7) Dendy, *Report Pearl Oyster Fisheries* (*Ceylon*), pag. 128-130, an. 1905, tav. V, fig. 9.

(8) Thiele, I. Zoolog. Jahrbucher, Iena, suppl. vol. III, an. 1905, pag. 409.

(9) Hentschel, *Die Fauna Südwest-Australiens, horsg v. W. Michaelsen u. R. Hartmeyer*, an. 1909. pag. 388.


1
2
3
4
5
6

viridis O. S. [1], non sono altro che delle variazioni dipendenti unicamente dall'ambiente.

Il genere *Cliona* appare nel paleozoico, dove è rappresentato da sole spicule, ma assume la maggior diffusione nelle epoche più recenti. Per parlare unicamente delle specie fossili descritte posteriormente al 1901, ricorderemo la *Cliona hackberryensis* Thomas [2] del Devoniano di Jowa, la *Cl. kelheadensis* e *Cl. arbiglandensis* Smith [3] del Carbonifero di Solway; la *Cl. cretacea e Cl. glomerata* del Cretaceo d'Inghilterra [4], la *Cl. mammillata* e la *Cl. peregrinator* Chapman [5] del Terziario di Vittoria, la *Cl. sulphurea* Clark [6] del Pleistocene di Maryland.

***

Le specie qui appresso illustrate sono sei, delle quali due (*Cliona entrerriana* e *Cl. Ameghinoi*) appartenenti all'Entrerriano (Miocene), tre al Quaternario (*Cl. americana, Cl. Roveretoi* e *Cl. pampeana*) ed una vivente (*Cliona patagonica*).

Cliona entrerriana Principi (tav. 1, fig. 1).

Questa spugna ricopre alcune valve di *Ostrea patagonica* d'Orb. e proviene dall'Entrerriano (miocene) della punta Norte della penisola Valdéz.

Le megasclere sono costituite da tilostili (*a*), strongili (*b*) e rabidi (*c*). I tilostili sono grandi, diritti, appuntiti ad un estremo, e terminano a guisa di capocchia all'estremo opposto. Gli strongili sono numerosi e rappresentati da bacchette assai lunghe e di varia larghezza. I rabidi sono irregolarmente uncinati lungo ambedue i lati. Le microsclere presentano dei pseudosterraster (*d*) e degli oxyaster (*f*) di piccole dimensioni; ed i corpuscoli (*e*) hanno un contorno rotondeggiante.

Una specie, che presenta qualche analogia con questa ora descritta, è la *Cl. peregrinator* Chapmann del Terziario di Vittoria; ma il diverso sviluppo ed il vario aspetto, che assumono le microsclere nelle due forme, ne permette facilmente la distinzione.

[1] Vosmaer, Amnesterdam Proces. Scient. k. Akademie Wet., an. 1908, pag. 37.

[2] Thomas, *A fossil burrowing sponge from the Jova Devunian*, Iowa City Bull. labor. nat. hist. univers., Iowa, an. 1911, pag. 165.

[3] Smith, *Carboniferous roks of the Solway, Scotland*. Glasgow Transact. geolog. Society, an. 1910, pag. 51.

[4] Jukes Browne A. I. and Hill. W., *The Cretaceousroks of Britain*. Mem. geolog. Survey, London, an. 1914.

[5] Chapman, *New or little known Victorian fossile in the National Museum. Some tertiary species*. Victoria Proccedings Royal Society, an. 1907, pagg. 208-209.

[6] Clark, Maryland Geolog. Survey. *Pliocene and Pleistocene Baltimore*, an. 1904.

Cliona Ameghinoi Principi (tav. I, fig. 2).

Gli esemplari, che si riferiscono a questa specie provengono da Entrerrios nel Paranà e rivestono e perforano delle valve di *Ostrea patagonica* D'Orb.

Tra le megasclere troviamo dei tilostili (*a*) affilati e forniti di una piccola capocchia ad un estremo; gli strongili (*b*) sono numerosissimi, e così pure i rabidi (*c*), che talvolta si sovrappongono intrecciandosi insieme. Esistono pure dei rabidi biforcati (*d*) alle due estremità, degli oxe (*e*) piuttosto scarsi, delle spicole a forma di X (*f*) e delle desme (*g*) con apofisi corte ed irregolari. Gli aster delle microsclere hanno moltissime braccia (*h*), ed i corpuscoli (*i*) sono analoghi a quelli della *Cl. entrerriana*.

È interessante di notare in questa spugna la mancanza dei grandi tilostili, che si osservano in quasi tutte le specie di *Cliona*.

Cliona americana Principi (tav. I, fig. 3).

Questa specie, come pure le altre due seguenti, *Cl. Roveretoi* e *Cl. pampeana*, provengono da Las Talas presso la città di La Plata, dove nel Quaternario medio (parte media del Pampeano) si verificò una invasione marina, che si estese lungo le rive del rio della Plata.

Tale invasione ebbe da Ameghino il nome di « *ingressione belgranense* » e fu da questo naturalista considerata pliocenica (1).

Tra le megasclere si osservano dei tilostili (*a*) molto simili a quelli della *Cliona celata* Grant (2); esistono, inoltre, degli strongili brevi, degli stili (*c*) un poco ricurvi e dei rabdi (*d*) affilati alle due estremità, i quali mancano nella specie vivente citata. Gli oxyaster (*f*) ed i metaster (*g*) delle microsclere sono assai evidenti, ed i corpuscoli (*i*) hanno un contorno rotondeggiante od ovaliforme. Alcuni pseudosterraster (*h*) si avvicinano a quelli della *Thoosa sabatia* Rovereto.

La specie descritta ha molte analogie anche colla *Cl. thoosina* Topsent (3) e colle *Cl. euryphylla* Topsent (4); ma se ne distingue per la diversa struttura delle microsclere e dei corpuscoli.

Gli esemplari studiati ricoprivano alcuni ciottoli calcari e frammenti di conchiglie indeterminabili.

(1) Vedi Rovereto G., *Studii di geomorfologia argentina:* parte IV, *La pampa.* Boll. Soc. Geol. ital., an. 1914.

(2) Topsent, *Contrib. à l'étude des Clionides*, Arch. d. zoolog. experim., vol. V *bis*, tav. VII, fig. 1.

(3) Topsent, op. cit., tav. VII, fig. 6.

(4) Topsent, op. cit., tav. VII, fig. 5.

Cliona Roveretoi Principi (tav. I, fig. 4).

Le megasclere sono simili a quelle della *Cl. americana*; esistono tuttavia dei rabdi (*b c*) rettangolari, lisci od uncinati. Sono presenti anche delle orthomonene (*d*), spicule caratterizzate da un bastone rettilineo, il quale ad un estremo possiede un clado ad angolo retto; e delle desme (*e*) formate da un corpo centrale costituito da una spicula a due raggi. Alcune spicule (*f*) hanno un aspetto di fuso coi due estremi formati di due piccole appendici distinte dal resto mediante una strozzatura. Le microsclere sono costituite da piccole spire (*g*); i corpuscoli, rotondeggianti, sono simili a quelli della specie precedente (*h*).

Per la forma delle megasclere la *Cl. Roveretoi* si avvicina alla *Cliona vastifica* Topsent (1).

Gli esemplari studiati sono stati rinvenuti sopra alcune conchiglie appartenenti al gen. *Voluta*.

Cliona pampeana Principi (tav. I, fig. 5).

Le megasclere differiscono da quelle della *Cl. americana* e *Cl. Roveretoi*, perchè mancano dei tilostili veri e proprii e sono presenti, invece, dei rabdi rappresentati da bastoncelli a forma di fuso o rettangolari arrotondati a due estremi, oppure seghettati lungo uno dei lati, e da alcune spicule. Si notano pure dei rafidi (*e*), strongili (*b*), oxe (*f*) e desme (*g*). Tra le microsclere mancano completamente gli aster, ed invece sono presenti delle spire (*h*) a forma di bastoncello ondulato.

I corpuscoli sono analoghi a quelli della *Cl. Roveretoi*, benchè meno numerosi (*i*).

Anche questa specie è stata trovata in alcuni frammenti di *Voluta*.

Cliona patagonica Principi (tav. I, fig. 6).

La specie qui appresso descritta è vivente e trovasi in una conchiglia di *Venus antiqua* King proveniente da Porto Madryn (Patagonia).

I tilostili (*a*), molto numerosi, sono simili a quelli della *Cl. americana* e *Cl. Roveretoi*, e raggiungono dimensioni notevolissime (circa 6 mm.). Anche gli strongili (*b*) sono assai lunghi, e si osservano dei rabdi (*a*) lievemente sinuosi e terminanti ai due estremi con una specie di rigonfiamento. Le megasclere sono rappresentate dagli pseudosterraster (*c*), ed i corpuscoli sono costituiti come da due sfere concentriche, assai vicine, e si presentano anche sotto l'aspetto di spicule minutissime e filiformi.

Anche questa specie si ricollega al tipo della *Cliona celata*, e per la conformazione dei cospuscoli può paragonarsi alla *Cl. armata* Topsent.

(1) Topsent, op. cit., tav. VII, fig. 3.

Chimica-fisiologica. — *Proprietà chimiche e chimico-fisiche dei muscoli e dei succhi muscolari.* Nota VI [1]: *Sul contenuto in fosforo dei muscoli striati bianchi e rossi.* Nota di G. QUAGLIARIELLO, presentata dal Corrisp. FILIPPO BOTTAZZI [2].

Sul contenuto in fosforo dei muscoli striati e lisci esistono numerose ricerche, ma da nessun autore venne mai determinato, almeno per quanto è a mia conoscenza, il contenuto in fosforo delle due varietà di muscoli striati: bianchi e rossi. Questa ricerca appariva tanto più interessante, in quanto che dai dati del Katz [3], che determinò i costituenti minerali dei muscoli in molte specie animali, risulta che il più elevato contenuto in fosforo si riscontra nei muscoli di coniglio e di pollo, vale a dire di quegli animali in cui i muscoli striati sono in gran parte costituiti da muscoli bianchi.

Ho perciò creduto utile di fare ricerche su tale argomento, determinando, oltre al fosforo totale, anche il fosforo dei fosfatidi, contenuto nelle due specie di muscoli.

Gli animali di cui mi sono servito sono stati il coniglio (*Lepus cuniculus*), il tacchino (*Meleagris gallopavo*), e il gallo (*Gallus domesticus*) Dagli animali dissanguati furono raccolti separatamente i muscoli bianchi e rossi, che, liberati dal connettivo e dal grasso, vennero, mediante una comune macchina tritacarne, ridotti allo stato di poltiglia.

Tale poltiglia, dopo prelevamento d'un campione per la determinazione del residuo secco a 110° C., venne disseccata a 70-80°, e poi ridotta allo stato di polvere omogenea.

Su questa polvere determinai:

a) il residuo secco a 110° C.

b) il fosforo totale;

c) il fosforo dei fosfatidi.

Per la determinazione del fosforo seguii il metodo di Neumann [4]; per la determinazione del fosforo dei fosfatidi un campione di polvere muscolare

(1) Per le Note precedenti, vedi questi Rendiconti, vol. 23 (5), pag. 634, 1914.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisiologia della R. Università di Napoli.

(3) Katz I., *Die mineralischen Besthandtheilen des Muskelfleisches*. Pflüg. Arch., Bd. 63, p. 1, 1896.

(4) Neumann A., *Einfache Veraschungsmethode (Säuregemisch-Veraschung) und vereinfachste Bestimmungen von Eisen, Phosphorsäure, Salzsäure und anderen Aschenbestandtheilen unter Benutzung dieser Säuregemisch-Veraschung*. Zeitschr. f. physiol. Chem., Bd. 37, pag. 115, 1902.

(5-6 gr.) venne estratto nell'apparecchio di Soxhlet dapprima con etere e poi con alcool per 24 ore, e nell'estratto, portato a secchezza, determinai il fosforo col metodo innanzi detto.

Nelle seguenti tabelle sono riportati i dati analitici dei miei esperimenti.

Dai dati riferiti risulta:

1°) I muscoli striati, sia bianchi sia rossi, di uccelli (tacchino e gallo) e di coniglio, hanno, in confronto dei muscoli striati degli altri animali, un elevato contenuto in fosforo. Ad esempio, Costantino (1), in alcune ricerche eseguite recentemente in questo Laboratorio, trovò che il contenuto in fosforo dei muscoli striati di bue, calcolato come anidride fosforica, e per 100 grammi di residuo secco, è, in media, di circa grammi 1,6. Dalle mie ricerche risulta per gli uccelli e pel coniglio un contenuto medio di circa 2 grammi %. Questa osservazione è del resto d'accordo con i dati innanzi citati del Katz, che fece le sue determinazioni su varie specie animali, e fra le altre sul coniglio e sul pollo, senza per altro separare, in questi ultimi animali, i muscoli bianchi dai rossi.

2°) I muscoli striati bianchi hanno un contenuto in fosforo totale lievemente superiore a quello dei muscoli rossi. Ciò risulta evidente dalla tabella I, in cui il fosforo è riferito ai muscoli freschi. Dalla tabella II invece, in cui il fosforo vien riferito al residuo secco, si rileva, che su una delle 6 esperienze eseguite (e precisamente la seconda esperienza sul gallo), il fosforo prevale leggermente nei muscoli rossi. Del resto, ripeto, la differenza fra le due specie di muscoli, per ciò che riguarda il fosforo totale, è lievissima.

3°) Molto differente è, invece, il contenuto in fosfatidi. Negli uccelli il fosforo dei fosfatidi rappresenta circa l' 11 % del fosforo totale nei muscoli bianchi, il 22 % nei muscoli rossi; nel coniglio la differenza, senza essere così cospicua, è tuttavia notevole: il 13 % nei muscoli bianchi, il 17 circa nei rossi. Katz (loc. cit.) trovò che il fosforo nell'estratto alcolico dei muscoli di coniglio corrisponde a circa il 12 % del fosforo totale: cifra che corrisponde a quella da me trovata pei muscoli bianchi. Ed è a questa varietà di muscoli che debbono riferirsi le determinazioni dall'autore fatte sul coniglio, giacchè è noto che la musculatura striata di questo animale è costituita quasi esclusivamente di muscoli bianchi.

Nell'estratto alcolico dei muscoli di pollo il Katz trovò il 10 % del fosforo totale. Questa cifra corrisponde a quella da me trovata pei muscoli

(1) Costantino A., *Beiträge zur Muskelchemie*. II. *Ueber den Gehalt der glatten und quergestreiften Säugetiermuskeln an organischen und anorganischen Phosphor*. Bioch. Zeitschr, Bd. 43, pag. 165, an. 1912.

bianchi. Ma il Katz adoperò per le sue analisi i muscoli del petto (bianchi), e della coscia (rossi), così che il suo valore è troppo basso rispetto ai miei, anche se si tien conto che la massa dei muscoli del petto supera sensibilmente quella dei muscoli della coscia.

Se ora si paragonano i miei dati con quelli innanzi citati di Costantino, si nota che i muscoli bianchi (sia di uccelli, sia di coniglio) hanno approssimativamente lo stesso contenuto percentuale di fosforo dei fosfatidi dei muscoli striati di bue; superano questi sensibilmente per il contenuto in fosforo inorganico. I muscoli rossi, invece, hanno un contenuto in fosforo dei fosfatidi notevolmente superiore a quello dei muscoli striati di bue; quasi si equivalgono invece per il loro contenuto in fosforo inorganico.

Conclusione. — Non esistono differenze cospicue fra muscoli bianchi e rossi per ciò che riguarda il contenuto in fosforo totale. Tali differenze esistono invece per ciò che riguarda lo stato chimico del fosforo, i muscoli rossi essendo notevolmente più ricchi di fosfatidi che non i muscoli bianchi.

Tabella 1.

100 grammi di carne fresca contengono:

	Muscoli bianchi							Muscoli rossi						
	Residuo secco a 110°	P_2O_5			P			Residuo secco a 110°	P_2O_5			P		
		totale	dei fosfaditi	inorganico (1)	totale	dei fosfatidi	inorganico		totale	dei fosfatidi	inorganico	totale	dei fosfatidi	inorganico
Tacchino 1	26,02	0,540	0,059	0,481	0,236	0,026	0,210	25,16	0,467	0,107	0,360	0,204	0,047	0,157
Tacchino 2	25,68	0,545	—	—	0,238	—	—	24,24	0,504	—	—	0,220	—	—
Gallo 1	27,96	0,585	0,062	0,523	0,255	0,027	0,228	25,95	0,534	0,117	0,417	0,233	0,051	0,182
Gallo 2	25,34	0,581	—	—	0,254	—	—	23,62	0,569	—	—	0,248	—	—
Coniglio 1	23,55	0,500	0,060	0,440	0,218	0,025	0,193	23,32	0,490	0,082	0,408	0,214	0,036	0,178
Coniglio 2	21,45	0,532	—	—	0,232	—	—	21,60	0,522	—	—	0,228	—	—

Tabella 2.

100 grammi di residuo secco contengono:

	Muscoli bianchi						Muscoli rossi					
	P_2O_5			P			P_2O_5			P		
	totale	dei fosfatidi	inorganico	totale	dei fosfatidi	inorganico	totale	dei fosfatidi	inorganico	totale	dei fosfatidi	inorganico
Tacchino 1	2,076	0,228	1,848	0,906	0,099	0,807	1,856	0,425	1,431	0,810	0,185	0,625
Tacchino 2	2,121	—	—	0,933	—	—	2,080	—	—	0,908	—	—
Gallo 1	2,029	0,223	1,869	0,914	0,098	0,816	2,057	0,450	1,607	0,898	0,196	0,702
Gallo 2	2,292	—	—	1,001	—	—	2,409	—	—	1,051	—	—
Coniglio 1	2,123	0,261	1,862	0,927	0,114	0,813	2,101	0,352	1,749	0,918	0,154	0,764
Coniglio 2	2,480	—	—	1,083	—	—	2,433	—	—	1,062	—	—

(1) In questa tabella, e nelle successive, la differenza tra il fosforo totale e quello dei fosfatidi è indicato come fosforo organico, soltanto per semplicità di espressione; essendo noto che il fosforo dei fosfatidi non rappresenta tutto il fosforo organico contenuto nei muscoli.

Tabella 3.

	Su 100 parti di fosforo totale			
	Muscoli bianchi		Muscoli rossi	
	P. dei fosfatidi	P. inorganico	P. dei fosfatidi	P. inorganico
Tacchino . .	10,98	89,02	22,89	77,11
Gallo	10,66	89,34	21,87	78,13
Coniglio . . .	12,99	87,01	16,75	83,25

Chimica fisiologica. — *Sulla possibilità di titolare al formolo il gruppo aminico monosostituito degli aminoacidi* (1). Nota del dott. Antonino Clementi, presentata dal Socio L. Luciani.

Un metodo il quale negli ultimi anni si è dimostrato di una grande fecondità nel campo della fisiologia e della chimica fisiologica, poichè ha contribuito a rischiarare alcuni dei problemi fondamentali riguardanti la costituzione della molecola proteica e delle sue pietre strutturali (aminoacidi) e la trasformazione che essi subiscono nell'organismo, è il metodo della titolazione al formolo, di Sörensen (2).

Il Sörensen nella elaborazione del suo metodo, si è fondato sulle ricerche di Schiff (3) il quale dimostrò che è possibile di determinare titrimetricamente la quantità dei gruppi aminici degli aminoacidi quando si escluda la funzione chimica basica del gruppo aminico stesso: ciò si ottiene quando ad una soluzione di aminoacidi venga aggiunta aldeide formica (formolo). La reazione ha luogo secondo la seguente equazione:

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH.NH_2 \\ | \\ CO.OH \end{array} + H\,CHO \quad \rightleftarrows \quad \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH.N=CH_2 \\ | \\ CO.OH \end{array} + H_2O$$

(alanina) (aldeide formica) — combinazione metilenica dell'alanina — (acqua)

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Sörensen, *Enzimstudien*. Biochemische Zeitschrift, 7 Band. Seite 45.

(3) Schiff, Ann. der Chemie - 310 - (1899) Ann. der Chemie - 319 (1901) Ann. der Chemie 325 (1902).

Questo esempio della alanina dimostra come l'idrogeno del gruppo aminico viene occupato da un gruppo metilenico, e la combinazione si comporta alla titolazione come un acido monovalente; se si ha un *diaminoacido*, come l'ornitina che possiede due amino-gruppi liberi, *allo stato di sale*, saranno due le molecole di formaldeide che reagiscono con essi, e l'aminoacido alla titolazione si comporterà come un acido divalente, mettendosi in evidenza la funzione acida anche del radicale acido del sale (1).

In questi casi, e in tutti quelli sinora studiati (anche di proteine ben individualizzate come le Protamine di Kossel (2)) il gruppo aminico NH_2 non presenta nessuno dei due idrogeni sostituiti. Però noi sappiamo che l'idrogeno del gruppo NH_2 può essere parzialmente o totalmente sostituito da un gruppo più o meno complesso, come ad es. da un metile, secondo lo schema $R—N<^{H}_{R}$; l'azoto aminico così parzialmente sostituito, ha un grande interesse fisiologico, perchè si riscontra anche nell'organismo in svariate sostanze come ad es. nella sarcosina.

Non è stato finora indagato nè da Schiff, nè da Sörensen, nè dagli altri autori, che hanno elaborato il metodo della titolazione al formolo, se il gruppo aminico degli aminoacidi, anche quando il suo idrogeno sia stato parzialmente sostituito, è capace di reagire colla formaldeide e quindi se anche in questo caso gli aminoacidi siano titolabili col metodo di Sörensen; tale problema presenta un evidente interesse chimico e fisiologico.

Io mi sono proposto di risolverlo, e a tal'uopo ho sperimentato *sulla sarcosina* (*metilglicocolla*), la quale rappresenta l'aminoacido monosostituito più semplice, avente la formula di struttura

$$\begin{matrix} CH_2 . N<^{H}_{CH_3} \\ | \\ CO . OH \end{matrix} .$$

(metilglicocolla)

Essa, come è noto, insieme col nucleo guanidinico, prende parte alla costituzione della molecola della creatina e della creatinina, che si riscontra in svariati tessuti dell'organismo e nell'urina; per azione della barite sulla creatina e anche sulla teobromina e caffeina, si ha formazione di sarcosina.

La sarcosina è stata da me sottoposta all'analisi secondo le modalità indicate per la titolazione al formolo da Sörensen (3). Sperimentalmente ho così proceduto:

(1) Clementi Antonino. *Ricerche sull'arginasi: un nuovo metodo titrimetrico per le ricerche dell'arginasi.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Classe di scienze fisiche e naturali, vol. XXIII, serie 5ª, 2° sem. 1911.

(2) Kossel und Gaurillow, *Weitere Untersüchungen über die freien Amido gruppen der Proteinstoffe. Zeitschr. f. Phys. Chemie, Bd. 81, s. 174.*

(3) Sörensen (loc. cit.); Jessen-Hansen, *Die Formoltitration.* Handbuch der Biochemischen Albeitsmetoden. 6 Band. Seite 262.

1ª *Analisi* — Gr. 0,0891 di metilglicocolla (peso molecolare 89.1) vengono sciolti in 10 cc. di acqua distillata; la soluzione risulta, così. $^1/_{10}$ *n*. Si aggiungono 20 cc. della miscela di formolo, preparata secondo le indicazioni di Sörensen, e altrettanti se ne aggiungono alla soluzione di controllo rappresentata da 10 cc. di acqua distillata bollita (la soluzione di sarcosina si scolora: quella di controllo acquista un colore rosa. leggermente più intenso). Subito si comincia la titolazione diretta, mediante NaOH $\frac{n}{5}$, e si giunge alla soprati-tolazione fino a 6 cc. di NaOH $\frac{n}{5}$; si rititola con HCl $\frac{n}{5}$, e si ottengono le cifre riportate nella Tabella I:

TABELLA I.

Sostanza analizzata	Colore dell'indicatore adoperato (Fenolftaleina)	Quantità adoperata di NaOH $\frac{n}{5}$ in cc. nella titolazione diretta	Quantità adoperata di HCl $\frac{n}{5}$ in cc. per la rititolazione	Quantità di NaOH $\frac{n}{5}$ calcolata in base ai dati ottenuti mediante la rititolazione con HCl $\frac{n}{5}$
Soluzione di controllo Acqua 10 cc.				
Miscela di Formolo 20 cc.	Rosa pallido. .	0,00	—	—
	Rosso evidente	0.10	—	—
	Rosso intenso .	0,20	—	—
	Sovratitolazione	0,30		
	Rosso intenso .	—	0,15	0,15
	Rosso evidente	—	0,20	0,10
Soluzione di Sarcosina $\frac{1}{10}$ *n* 10 cc.				
Miscela di Formolo 20 cc.	Effiorescenza rosa inferiore al rosa pallido del controllo.	3,30	—	—
	Rosa pallido come il controllo.	3,80	—	—
	Rosso evidente	4,50	—	—
	Rosso intenso .	4,90	—	—
	Sovratitolazione	6,00		
	Rosso intenso	—	1,05	*4,95*
	Rosso evidente	—	1,40	*4,60*
	Rosa pallido .	—	2,15	3,85
	Rosa più pallido del controllo. .	—	2,50	3,50

Dalle cifre ottenute per la titolazione della soluzione di sarcosina sottraendo le cifre ottenute per la titolazione della prova di controllo, risulta che, per titolare 10 cc. di sarcosina $^1/_{10}$ *n*, sono necessarii cc. 4,5 di NaHO $^1/_5$ *n* per raggiungere il colore rosso evidente della fenolftaleina (secondo stadio di Sörensen) e cc. 4,8 di NaOH $^1/_5$ *n* per raggiungere il colore rosso intenso della fenolftaleina (terzo stadio di Sörensen).

Facendo il calcolo dell'azoto che così viene titolato, rispetto a quello che teoricamente dovrebbe essere titolato, si ottengono le cifre riportate nella Tabella II:

Tabella II.

Sostanza adoperata per l'analisi	Indicatore adoperato	Quantità adoperata di NaOH $\frac{N}{5}$		*Osservazioni*
		in cc.	in °/₀ del calcolato	
10 ccm. di soluzione $\frac{1}{10}n$ di *sarcosina* (metilglicocolla)	Fenolftaleina (colore rosso evidente) . . (2° stadio)	4,50	90,0	—
	Fenolftaleina (colore rosso intenso) . . . (3° stadio)	4.80	96,0	—

Il risultato ottenuto in questa analisi dimostra, che la *sarcosina reagisce positivamente con la formaldeide, e nella titolazione eseguita secondo il metodo di Sörensen, si comporta come un acido monobasico.*

2ª *Analisi* — Gr. 0,1782 di sarcosina vengono sciolti in 20 cc. di acqua distillata. La soluzione risulta, così, $^1/_{10}$ *n*. Si aggiungono 20 cc. di miscela di formolo preparata secondo le indicazioni di Sörensen, e altrettanti se ne aggiungono alla soluzione di controllo (20 cc. di acqua distillata bollita): la soluzione di sarcosina si scolora; quella di controllo acquista una colorazione rosa, leggermente più intensa. Subito si comincia la titolazione diretta mediante NaOH $\frac{n}{5}$, e si a sovratitola fino a 11 cc.; quindi si rititola con H Cl $\frac{n}{5}$, si ottengono così le cifre indicate nella Tabella III.

TABELLA III.

SOSTANZA analizzata	Colore dell'indicatore adoperato (fenolftaleina)	Quantità adoperata di NaOH $\frac{n}{5}$ in cc. nella titolazione diretta	Quantità adoperata di HCl $\frac{n}{5}$ in cc. per la rititolazione	Quantità di NaOH $\frac{n}{5}$ calcolata in base ai dati ottenuti mediante la rititolazione con HCl $\frac{n}{5}$
Soluzione di controllo Acqua 10 cc.				
Miscela di Formolo 20 cc.	Rosa pallido. .	0,0	—	—
	Rosso evidente	0,1	—	—
	Rosso intenso.	0,3	—	—
	Sovratitolazione	0,50		
	Rosso intenso.	—	0,20	0,30
	Rosso evidente	—	0,40	0,10
Soluzione di sarcosina $\frac{n}{10}$ 20 cc.				
Miscela di Formolo 20 cc.	Efflorescenza rosa inferiore al rosa pallido del controllo.	6,50	—	—
	Rosa pallido come il controllo.	7,60	—	—
	Rosso evidente	*9,00*	—	—
	Rosso intenso	*9,70*	—	—
	Sovratitolazione	11,00		
	Rosso intenso	—	1,30	*9,70*
	Rosso evidente	—	1,90	*9,10*
	Rosa pallido. .	—	3,20	7,80
	Rosa più pallido del controllo .	—	4,10	6,90

Dalle cifre ottenute nella titolazione della soluzione. sottraendo le cifre ottenute nella titolazione della prova di controllo, risulta che, per titolare 20 cc. di sarcosina $^1/_{10}$ *n*, sono necessarî cc. 9 di NaOH $^1/_5$ *n* per raggiungere il colore rosso evidente della fenolftaleina (secondo stadio di Sörensen). e cc. 9,4 di NaOH $^1/_5$ *n* per raggiungere il colore rosso intenso della fenolftaleina (terzo studio di Sörensen).

Facendo il calcolo dell'azoto che così viene titolato rispetto a quello che teoricamente dovrebbe risultare, si ottengono le cifre visibili nella seguente tabella:

Tabella IV.

Sostanza adoperata per l'analisi	Indicatore adoperato	Quantità adoperata di NaOH $\frac{n}{5}$		Osservazioni
		in cc.	in % del calcolato	
20 ccm. di soluzione $\frac{1}{10}$ n di *sarcosina* (metilglicocolla)	Fenolftaleina (colore rosso evidente) . . (2° stadio)	9,00	90,00	
	Fenolftaleina (colore rosso intenso). . . (3° stadio)	9,40	94,00	

I risultati ottenuti in questa analisi dimostrano che *la sarcosina reagisce positivamente colla formaldeide, e nella titolazione secondo il metodo di Sörensen, si comporta come un acido monobasico.*

Dato il comportamento di acido monobasico della sarcosina nella titolazione al formolo, come risulta dalle esperienze surriferite, si deduce che la sarcosina e l'aldeide formica reagiscono fra loro secondo la seguente equazione:

$$\begin{matrix} CO.OH \\ | \\ CH_2.N<\begin{matrix}CH_3\\H\end{matrix} \\ \\ CH_2.N<\begin{matrix}H\\CH_3\end{matrix} \\ | \\ CO.OH \end{matrix} + H\,CHO = \begin{matrix} CO.OH \\ | \\ CH_2.N<\begin{matrix}CH_3\\ \\ CH_2\end{matrix} \\ \\ CH_2.N<CH_3 \\ | \\ CO.OH \end{matrix} + H_2O$$

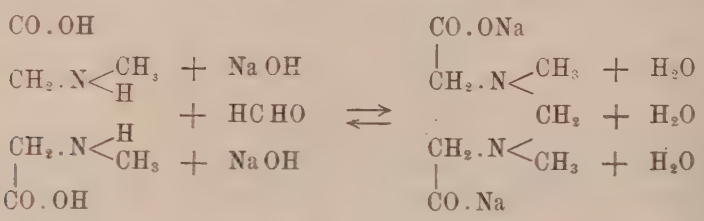
(sarcosina) (formaldeide) (combinazione metilenica della sarcosina) (acqua)

dove due molecole si sarcosina si uniscono a una molecola di formaldeide dando luogo alla combinazione metilenica della sarcosina, più una molecola di acqua; la funzione acida del carbossile delle due molecole di sarcosina viene così messa in evidenza e si lascia determinare quantitativamente coll'idrato di sodio.

Se rispetto al risultato finale la sarcosina, analogamente alla glicocolla, si comporta come un acido monobasico, vi è una lieve differenza nel comportamento della glicocolla e, rispettivamente, della sarcosina, nel senso che le cifre ottenute nella titolazione al formolo, della sarcosina, sono più basse di quelle che si ottengono nella titolazione della glicocolla. Infatti, mentre, ad es., per titolare fino al secondo e al terzo stadio 10 cc. di soluzione $^1/_{10}$ n

di glicocolla, Sörensen impiegò un numero di cc. di $Ba(OH)_2$ $\frac{n}{5}$ corrispondenti al 99 % del calcolato, per titolare 10 cc. di sarcosina $^1/_{10}$ *n* fino al secondo stadio io ho impiegato 4.5 cc. di NaOH $^1/_5$ *n* corrispondenti al 90 % del calcolato; e per raggiungere il terzo stadio della colorazione della fenolftaleina, ne ho impiegati 4,8 corrispondenti al 96 % del calcolato.

Come si vede, il comportamento della sarcosina si avvicina di più a quello osservato da Sörensen per l'alanina ed altri aminoacidi, che non a quello della glicocolla. Gli stessi fattori già invocati da Sörensen si possono invocare per spiegare questo comportamento della sarcosina. Anzitutto il fatto che il sistema, il quale si origina durante la titolazione con NaOH.

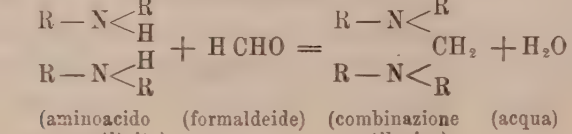


è reversibile, e l'aumento del numero degli idrossilioni della soluzione fa ritardare il decorrere della reazione da sinistra a destra: d'altra parte si aggiunga il fatto, del comportamento diverso, rispetto all'indicatore fenolftaleina, dell'acqua e degli acidi forti da una parte, e delle soluzioni di acidi deboli, come sono le combinazioni metileniche, dall'altra. Ciò sembra stare in rapporto, secondo le ricerche di Sörensen, con una diversa concentrazione degli idrogenioni: così che, *nel caso della sarcosina* come nel caso dell'alanina rilevato da Sörensen, si ha *un passaggio lento da uno stadio all'altro della colorazione della fenolftaleina*, laddove per la soluzione di controllo bastano in genere da 0,1 a 0,2 cc. di NaOH $\frac{n}{5}$ per fare passare la concentrazione degli idrogenioni da 10^{-8} $10^{-8.4}$ (primo stadio) a $10^{-8.7}$ $10^{-8.8}$ (secondo stadio) e 10^{-9} $10^{-9.1}$ (terzo stadio).

Le conclusioni generali che si ricavano dalle presenti ricerche, sono le seguenti:

1°) *Il gruppo aminico degli aminoacidi, anche se monosostituito, reagisce colla aldeide formica.*

2°) *La reazione avviene tra una molecola di aldeide formica e due molecole dell'aminoacido monosostituito, legandosi il metilene a due atomi di* N, *secondo lo schema:*



(aminoacido monosostituito) (formaldeide) (combinazione metilenica) (acqua)

3°) *L'amino acido monosostituito presenta il comportamento di un acido monobasico nella titolazione al formolo secondo il metodo di Sörensen.*

4°) *Per rilevare tale comportamento è necessario proseguire la titolazione fino a raggiungere il colore rosso intenso della fenolftaleina.*

Zoologia. — *A proposito delle spermatofore di Carybditeuthis maculata ritenute spugne parassite.* Nota preliminare di Silvia Mortara [1], presentata dal Socio B. Grassi.

Avendo iniziato, per consiglio del prof. Grassi, uno studio su alcune specie di Cefalopodi abissali [2], voglio esporre in una breve Nota le osservazioni da me fatte sulle spermatofore nella *Carybditeuthis maculata*, riservandomi di pubblicare a suo tempo altre più estese ricerche con le tavole illustrative.

Nella femmina della *Carybditeuthis*, aprendo il mantello dal dorso e togliendo il gladio, ho trovato, in tutti gli individui da me osservati, caudalmente rispetto al muscolo collare, una speciale area pieghettata che fa parte della parete dorsale del sacco viscerale, ed ha la forma di un cerchio troncato nella parte posteriore. Su quest'area posa un corpo tondeggiante, che ha forma press'a poco di una lente piana dorsalmente, convessa ventralmente, e che con una porzione del suo contorno aderisce completamente al margine posteriore dell'area stessa. Questo corpo, se non viene levato accuratamente, può apparire bucherellato come un favo. Accurate osservazioni mi hanno mostrato che esso è contenuto entro una specie di saccoccia, la quale ha una parete ventrale formata dall'area pieghettata, di cui ho parlato, e una parete dorsale formata da una porzione del mantello. Le due pareti sono congiunte l'una all'altra posteriormente.

Ho voluto in particolare modo studiare questo corpo, descritto come *una spugna acalcarea* da chi prima di me l'ha osservato [3], e mi sono facilmente persuasa, già dalle dilacerazioni, che si tratta invece di *un insieme di spermatofore*, deposte evidentemente dal maschio durante l'accoppiamento.

La ricerca bibliografica [4] e lo studio istologico hanno convalidato le mie osservazioni.

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Ringrazio il dott. Cotronei che mi ha guidata nella ricerca.

(3) A. Vivanti, assistente all'Istituto zoologico della R. Università di Pavia, diretto dal prof. Mazzarelli (*Contributo alla conoscenza dei Cefalopodi abissali del Mediterraneo*, nell'Arch. zool. ital., vol. VII, 1914).

(4) Racovitza, Arch. Zool. Exper., t. II, S. 3.

Infatti il corpo in esame, dilacerato, lascia subito scorgere un numero grandissimo di spermatozoi contenuti dentro cavità speciali.

Con opportuni metodi di fissazione e colorazione ho potuto vedere che l'area pieghettata è rivestita da un epitelio altissimo, e che questo non si riscontra più al margine posteriore, dove non si trovano più le pieghe, e neppure in tutta la parete dorsale della saccoccia.

Sui tagli, il corpo risulta formato della unione di tanti tubuli, con direzione prevalentemente dorso-ventrale, che, per quanto ho potuto vedere, sono disposti a raggera e terminano assottigliati dorsalmente. Questi tubuli contengono una quantità grandissima di spermatozoi, fuori che nella suddetta porzione terminale assottigliata, dove si trova soltanto una sostanza apparentemente mucosa. Hanno una sottile parete propria, amorfa, e sono collegati gli uni agli altri da una sostanza cementante, la quale si colora differentemente dalla parete propria; essa forma uno strato continuo dorsalmente, congiungente tutto l'insieme delle spermatofore con la parete dorsale della saccoccia. Sulla natura di questa speciale sostanza non posso dir nulla: essa non è certamente formata da cellule. Come si comportano i tubuli dal lato ventrale, non ho ancora stabilito.

Per controllo delle mie ricerche ho voluto tagliare anche la *tasca delle spermatofore* del maschio, che, nell'individuo sessualmente maturo, è completamente piena di spermatofore, disposte longitudinalmente, le une vicino alle altre. Usando gli stessi metodi, ho avuto una sicura conferma alle mie prime osservazioni perchè ho trovato le stesse sezioni di tubuli, con sottile parete propria amorfa, contenenti moltissimi spermatozoi. Nelle osservazioni finora compiute non ho qui trovato alcuna sostanza cementante fra le spermatofore, che si mostrano indipendenti tra loro, per quanto vicine, e si possono isolare facilmente, tirandole fuori dalla tasca che le contiene.

Il fatto da me osservato trova riscontro nelle osservazioni compiute su altri Cefalopodi (zona pieghettata nell'area copulatrice di *Rossia macrosoma*), nei quali pure il maschio deposita un gran numero di spermatofore durante l'accoppiamento.

Come, nella specie da me studiata, e per quali ragioni, tale deposizione avvenga nella regione dorsale; quale porzione delle spermatofore vengad epositata nella femmina, e come gli sperni arrivino a fecondare le uova mature all'uscita dell'ovidutto, non potrei per ora dire con certezza; ma mi riservo di far conoscere in seguito le mie osservazioni in proposito, con un lavoro esteso, nel quale entrerò in maggiori particolari.

Chimica. — *Il sistema nitroglicerina - cotone nitrato. Estrazione della nitroglicerina dalla balistite per distillazione nel vuoto a temperatura ordinaria* (1). Nota II di D. Chiaraviglio e O. M. Corbino, presentata dal Socio E. Paternò.

Nel pallone schematicamente rappresentato dalla fig. 1, il tappo, a chiusura ermetica per alti vuoti, porta una lunga appendice tubulare, dentro la

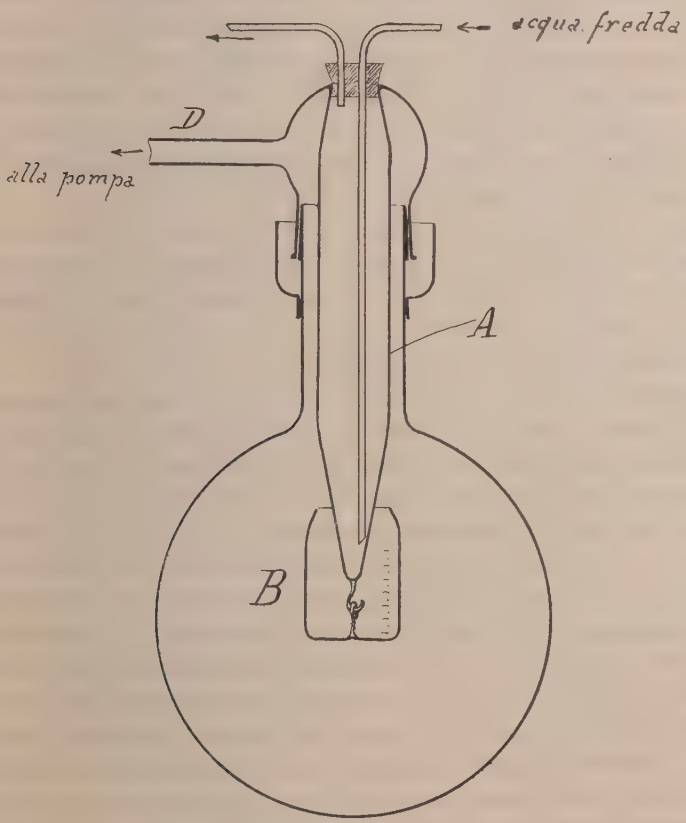


Fig. 1.

quale circola dell'acqua fredda. Il fondo del pallone fu riempito di truccioli finissimi di balistite, dello spessore di pochi centesimi di millimetro. Essi furono ottenuti adattando un rasoio bulino a una solida piallatrice per metalli, in modo da far discendere la lama di qualche centesimo di millimetro

(1) Lavoro eseguito nel « Laboratorio chimico per le sostanze esplosive » del Ministero degli interni in Roma.

per volta, con l'aiuto di una fine vite micrometrica; il campione di balistite, situato nel posto spettante al metallo da piallare, era una lastra dello spessore di circa un millimetro.

L'appendice tubulare *A*, terminata a cono, regge un bicchiere di vetro *B*, che ne copre l'estremità, cosicchè, se delle gocce si condensano sull'appendice medesima, esse, scorrendo lungo il tubo, finiscono col raccogliersi nel serbatoio. Sulla parete di questo era incisa una scala millimetrata, per poter misurare la variazione di livello del distillato.

Per mezzo della diramazione *D*, l'apparecchio fu innestato alla pompa Gaede a mercuro e al provino di Mac-Leod; si poteva così praticare nel pallone una rarefazione molto elevata, e misurare la pressione residua. Come sempre, un palloncino pieno di anidride fosforica serviva a trattenere il vapore d'acqua; mentre una piegatura a U del tubo di comunicazione tra la pompa e il pallone si faceva pescare in una miscela di ghiaccio e sale, in modo da impedire che i vapori di mercurio della pompa giungessero in misura sensibile nel pallone.

Tutto l'apparecchio venne introdotto in un grande termostato ad aria che permetteva di mantenere le pareti del pallone a una temperatura costante e regolabile con un sistema di riscaldamento elettrico; mentre una corrente di acqua a circa 10°, che passava continuamente nell'appendice *A*, ne manteneva sempre fredda la parete.

Un termometro era immerso nei trucioli di balistite; attraverso alle finestre di vetro, di cui è provveduto il termostato ad aria, si poteva osservare il livello del liquido nel serbatoio *B*, e la temperatura dei trucioli. Già a temperatura ordinaria, ch'era alquanto più alta di quella del refrigerante, si manifestò una ben netta condensazione di vapori nel tubo. Elevando poi a circa 30° la temperatura del pallone, la condensazione si fece molto più copiosa; le goccioline, ingrossandosi, scorrevano in basso raccogliendosi nel serbatoio *B*. Il liquido condensato aumentava col tempo, ma la rapidità della distillazione si andava sempre più rallentando, cosicchè dopo alcuni giorni il livello del distillato più non manifestò variazioni apprezzabili.

Fu necessario sorvegliare col provino Mac-Leod l'andamento della pressione, e mettere in funzione la pompa appena la pressione non era molto bassa. Nelle nostre esperienze essa è stata mantenuta sempre inferiore ad $^1/_{1000}$ di millimetro di mercurio. In queste condizioni il liquido raccolto era costituito dalla nitroglicerina, che si era separata dai trucioli di balistite deposti nel fondo del pallone.

L'esperienza conduce egualmente a un risultato positivo, sebbene in un tempo più lungo, ricorrendo, anzichè a dei trucioli, ad un'ordinaria placca di balistite. Così, con una placca di circa un millimetro di spessore, e arrotolata in cilindro, si potè (tenendola per circa 11 giorni a 32° nell'interno del pallone, mentre il refrigerante era mantenuto a 0°) abbassare dal 48 % a circa il 32 %

il contenuto in nitroglicerina. La nitroglicerina estratta era perfettamente incolore, e al saggio di Abel manifestò una costante di stabilità corrispondente a 15 minuti primi. Trovammo però preferibile di operare con balistite in trucioli; nè parve necessario di tenere a 0° il refrigerante, essendo sufficiente la temperatura di 12° ottenuta per circolazione dell'acqua di città. In una esperienza, eseguita in queste condizioni con trucioli da 0,04 mm. di spessore e mantenendo a 30° la temperatura del pallone, dopo 16 giorni il livello del liquido raccolto non manifestò ulteriori variazioni; abbassando un poco la temperatura del refrigerante, si ebbe ancora una lieve variazione del livello. La balistite adoperata era di aspetto non buono; ma non si aveva ragione di ritenerla estremamente alterata. Essa conteneva inizialmente il 50,4 % di nitroglicerina; dopo ne conteneva il 32 %. Il distillato era di colore giallastro, e marcava già a freddo col saggio di Abel; effettivamente, dopo pochi giorni si decompose spontaneamente.

Infine un terzo campione di balistite, ridotto pure in trucioli da 0,04 mm., fu tenuto per nove giorni alla temperatora ambiente, 17°, mentre il refrigerante era a 14°; e ciò fu sufficiente perchè nel serbatoio si raccogliessero circa gr. 6,5 di nitroglicerina su 100 gr. di balistite. Dopo otto giorni di riscaldamento a 30°, si ebbero altri 22 gr. di distillato; ma già negli ultimi tre giorni il livello si era mantenuto invariato. Venne allora elevata fino a 40°, la temperatura della balistite mentre il refrigerante si trovava a 16°; e si estrassero, così, ancora altri 6 gr. di liquido, in circa quattro giorni, dei quali gli ultimi due non ebbero quasi nessun effetto. La balistite primitiva conteneva il 51 % di nitroglicerina; questa si ridusse al 20,4 % dopo l'esperienza. Il liquido ottenuto, non ostante la più alta temperatura dell'estrazione, era perfettamente incolore, e aveva una stabilità corrispondente a 18′ nel saggio di Abel.

Abbiamo voluto esporre con abbondanti dati numerici i risultati di queste nostre esperienze, poichè se da un lato possono considerarsi come inverse di quelle riferite nella prima Nota, dall'altro sembra a noi che abbiano un interesse pratico piuttosto notevole.

Nella prima Nota ponemmo in rilievo varie analogie tra il fenomeno dell'assorbimento del vapor d'acqua da parte della cellulosa secca, e quello del vapore di nitroglicerina da parte della cellulosa nitrata. Le esperienze ora riferite mostrano che l'analogia fra i due sistemi acqua - cellulosa, nitroglicerina - cellulosa nitrata, esiste anche quando si consideri, invece dell'assorbimento, l'emissione dei vapori del liquido da una miscela di solido e liquido contenente una proporzione, di questo, superiore ad un certo limite. Come esiste per la cellulosa secca una cifra di ripresa d'acqua (umidità) dipendente dalla temperatura e dall'umidità dell'ambiente, così sembra esistere per la cellulosa nitrata un limite all'assorbimento dei vapori di nitroglicerina, limite dipendente essenzialmente dalla temperatura del sistema.

Dal punto di vista pratico, le nostre esperienze hanno interesse, sia perchè fenomeni simili a quelli ora descritti possono avere luogo in seno agli esplosivi relativamente ricchi di nitroglicerina (oltre il 40 %), quando in questi, per lente oscillazioni di temperatura, la nitroglicerina tende a portarsi alla superficie dei pezzi (essudare); sia perchè le esperienze possono facilitare la ricerca del grado di stabilità degli esplosivi da guerra del tipo della balistite.

Fig. 2.

Sono note le grandi difficoltà che s'incontrano in tali determinazioni. Or il metodo da noi adoperato permette che da un campione di balistite si estragga la maggior parte del suo contenuto in nitroglicerina, senza elevarne la temperatura al disopra dei limiti che si raggiungono normalmente nella stagione estiva e nelle santebarbare delle navi; e così dati importanti possono dedursi nei riguardi della nitroglicerina che la balistite contiene. Il successo del metodo risiede nella proprietà da noi messa in evidenza: che cioè la nitroglicerina distilla a freddo, conservando inalterate le sue caratteristiche almeno per quanto riguarda la stabilità. A questo proposito

è molto significativa l'esperienza seconda, che pur essendo eseguita a temperatura più bassa di quella della terza, diede un distillato di cui era imminente la decomposizione, dimostrando così le pessime qualità che si sospettavano nella balistite da cui era stata estratta.

Tornando alle esperienze generali con le balistiti ordinarie, ci resta da riferire sulle alterazioni di struttura che l'esplosivo presenta dopo il trattamento sovra indicato, che ne abbassa dal 50 al 30 circa il contenuto percentuale di nitroglicerina.

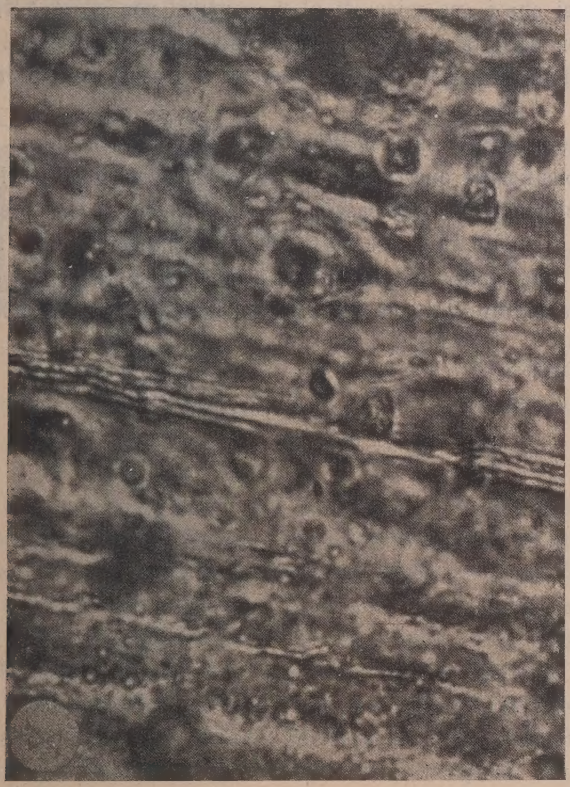


Fig. 3.

L'aspetto esterno dei trucioli non appare notevolmente modificato; e così, dopo l'esperienza eseguita con una lamina da un millimetro non piallata, potemmo constatare che non si erano prodotti sensibili mutamenti nella trasparenza, ma solo un piccolo irrigidimento nella sua struttura elastica.

Vennero pertanto eseguite delle microfotografie dei trucioli, prima e dopo il trattamento. Le figg. 2 e 3 riproducono appunto i fotogrammi rispettivamente ottenuti (ingrandimento 2000): a noi sembra che non ostante l'estrazione di una così rilevante parte di nitroglicerina, i mutamenti isto-

logici osservabili sono troppo piccoli per poter essere affermati sicuramente, tanto più che differenze forse altrettanto rilevanti si constatano fra le diverse regioni di uno stesso truciolo prima del trattamento. Ci proponiamo di eseguire una prova più dimostrativa, fotografando nella stessa regione un truciolo su un vetrino, prima e dopo di averlo sottoposto all' azione del vuoto.

La lunga osservazione dell'andamento delle pressioni al manometro, durante il trattamento che si faceva subire alla nitroglicerina e alla balistite, ci ha persuasi che i gas misurati al manometro non possono avere per sola origine le non perfette chiusure a vuoto dell'intero apparecchio, e nemmeno lo sviluppo delle atmosfere gassose aderenti ai corpi sottoposti all'azione del vuoto.

Non è improbabile che possiamo riuscire a raccogliere sistematicamente e ad analizzare questi prodotti gassosi che vengono fuori dagli esplosivi da noi cimentati. In tal caso noi riteniamo che se ne possan dedurre informazioni di molto interesse sulla lenta decomponibilità a freddo degli esplosivi più importanti, potendosi fare a meno di cimentarli, per la prova, a temperature elevate cui non corrispondono affatto le condizioni normali di conservazione.

E. M.